مسائل في الدوال الأسية

المسألة الأولى

I. لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$g(x)=e^{x}-2x+2$$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$
2. أحسب $g'(x)$ لكل $x\in\mathbb{R}$ وضع جدول تغيرات g
3. استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{2}x+1+\frac{x}{e^{x}}$$

(C_f) المنحنى الممثل لها في معلم م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة
2. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\left(\frac{1}{2}x+1\right)$ ثم أول النتيجة
3. أدرس الوضع النسبي ل (C_f) والمستقيم (D) الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x+1$
4. بين أن $f'(x)=\frac{g(x)}{2e^{x}}$ لكل x من $\mathbb{R}$ وضع جدول تغيرات الدالة f
5. بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]-1,0[$ بحيث $f(\alpha)=0$
6. حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأفصول $x_0=0$
7. بين أن $f''(x)=\frac{x-2}{e^{x}}$ ثم حدد زوج إحداثيتي نقطة انعطاف المنحنى (C_f)
8. أنشئ المنحنى (C_f) نأخذ $\frac{2}{e^{2}}\approx 0.27$

المسألة الثانية

I. نعتبر الدالة g للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$g(x)=-xe^{-x}+1$$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$
2. أحسب $g'(x)$ لكل $x\in\mathbb{R}$ وضع جدول تغيرات g
3. استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f(x)=x-1+(x+1)e^{-x}$$

(C_f) المنحنى الممثل لها في معلم م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
2. بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (يمكن وضع $t=-x$)
3. بين ان المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$
4. أدرس الفرع اللانهائي ل (C_f) بجوار $-\infty$
5. أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (D)
6. بين أن $(\forall x\in\mathbb{R}):\ f'(x)=g(x)$ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f
7. أدرس تقعر المنحنى (C_f) محددا نقطة انعطافه
8. حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأفصول $x_0=0$
9. أنشئ المنحنى (C_f) (نأخذ $e^{-1}\approx 0.36$)

III. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_{n+1}=f(u_n) \\ u_0=1 \end{cases}$$

1. بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}):0\le u_n\le 1$
2. بين أن المتتالية (u_n) تناقصية
3. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها

المسألة الثالثة

I. نعتبر الدالة g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$g(x)=e^{x}-x$$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$
2. أحسب $g'(x)$ لكل $x\in\mathbb{R}$ وضع جدول تغيرات g
3. استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II. لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي:

$$f(x)=\ln\left(e^{x}-x\right)$$

1. تحقق من أن $D_f=\mathbb{R}$

2. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
3. أثبت أن $f'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$ لكل x من $\mathbb{R}$ وضع جدول تغيرات الدالة f
4. تحقق من $(\forall x\in\mathbb{R}): f(x)=x+\ln\left(1-\frac{x}{e^x}\right)$
5. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$ ثم أعط تأويلا هندسيا
6. أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (D) الذي معادلته $y=x$
7. تحقق من أن:
$$(\forall x\in]-\infty,0[): f(x)=\ln(-x)+\ln\left(1-\frac{e^x}{x}\right)$$
8. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثم أول هندسيا النتيجة
9. لتكن h قصور f على المجال $I=]-\infty,0]$. بين أن h تقبل دالة عكسية h^{-1} معرفة على مجال J ينبغي تحديده.
10. أنشئ في نفس المعلم المنحنيين (C_f) و (C_h)

III. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي:
$$\begin{cases} u_{n+1}=f(u_n) \\ u_0=2 \end{cases}$$
1. بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}): 0\le u_n\le 2$
2. أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ثم حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$

المسألة الرابعة

I. لتكن g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي:
$$g(x)=e^x-x+1$$
1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$
2. أحسب $g'(x)$ لكل $x\in\mathbb{R}$ وضع جدول تغيرات g
3. استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:
$$f(x)=\ln\left(e^x-x+1\right)$$
1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
2. تحقق من أن: $f(x)-x=\ln\left(1+e^{-x}-xe^{-x}\right)$

ثم استنتج أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$
3. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ واستنتج الفرع اللانهائي ل (C_f) بجوار $-\infty$
4. أحسب $f'(x)$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f
5. نضع $h(x)=e^{-x}-xe^{-x}$
a) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$
b) أحسب $h'(x)$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة h
c) استنتج إشارة $h(x)$ على $\mathbb{R}$
6. أدرس الوضع النسبي ل (C_f) و (Δ)
7. أنشئ المنحنى (C_f)

III. نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي:
$$\begin{cases} u_{n+1}=f(u_n) \\ u_0=e \end{cases}$$
1. بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}): u_n>1$
2. بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية
3. استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ثم حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$

المسألة الخامسة

I. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي:
$$h(x)=xe^x+e^x-1$$
1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$
2. ضع جدول تغيرات الدالة h
3. أحسب $h(0)$ ثم استنتج إشارة $h(x)$ على $\mathbb{R}$

II. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي:
$$g(x)=xe^x-x+1$$
1. بين أن $g'(x)=h(x)$
2. أحسب $g(0)$ ثم استنتج أن $g(x)>0$ على $\mathbb{R}$
3. تحقق من أن $g(x)-e^x=(x-1)(e^x-1)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم استنتج أن $\forall x\in[0,1]: g(x)\le e^x$

III. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:
$$f(x)=\ln\left(xe^x-x+1\right)$$
1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2. بين أن $(\forall x\in\mathbb{R}): f'(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f

3. تحقق من أن:

$$(\forall x\in\mathbb{R}): \frac{f(x)}{x}=\frac{\ln\left(xe^x-x+1\right)}{\left(xe^x-x+1\right)}\times\left(e^x-1+\frac{1}{x}\right)$$

4. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثم أول هندسيا النتيجة

5. تحقق من أن:

$$(\forall x\in\mathbb{R}): f(x)=x+\ln(x)+\ln\left(1-\frac{1}{e^x}+\frac{1}{xe^x}\right)$$

6. حدد الفرع اللانهائي ل $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$

7. أحسب $f(1)$ ثم أنشئ $\left(C_f\right)$

IV. نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases}u_{n+1}=f(u_n)\\u_0=\ln(2)\end{cases}$$

1. بين بالترجع أن $(\forall n\in\mathbb{N}): 0\leq u_n\leq1$
2. بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ تناقصية
3. استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة ثم حدد نهايتها

المسألة السادسة

I. لتكن g الدالة المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$g(x)=e^x+2x-e^{-x}$$

1. أحسب $g'(x)$ لكل $x\in[0,+\infty[$
2. ضع جدول تغيرات g على $[0,+\infty[$
3. استنتج إشارة $g(x)$ على $[0,+\infty[$

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$f(x)=x-\frac{2x}{e^x+1}$$

وليكن $\left(C_f\right)$ منحنى الدالة في م.م.م $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1. بين أن $D_f=\mathbb{R}$
2. تحقق من أن $\frac{2x}{e^x+1}=2x-\frac{2x}{e^x+1}$ ثم بين أن الدالة f دالة زوجية وأعط تأويل هندسي
3. بين ان $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

4. بين أن $(\forall x\in\mathbb{R}): f'(x)=\frac{g(x)e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f على $[0,+\infty[$
5. أعط جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$
6. بين أن المستقيم $(\Delta): y=x$ مقارب مائل ل $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$
7. بين أن $\left(C_f\right)$ يوجد تحت (Δ) على المجال $[0,+\infty[$
8. أنشئ $\left(C_f\right)$

III. نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases}u_{n+1}=u_n-\frac{2u_n}{e^{u_n}+1}\\u_0=\ln(2)\end{cases}$$

1. بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}): u_n>0$
2. بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ تناقصية قطعا
3. استنتج أن $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة وحدد نهايتها

المسألة السابعة

I. لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي:

$$g(x)=(x-1)e^x+1$$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$
2. بين أن $g'(x)=xe^x$ ثم أنجز جدول تغيرات g
3. أحسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f(x)=x+(x-2)e^x$$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$
2. بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ وأول هندسيا النتيجة
3. بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-x=0$ وأول هندسيا النتيجة
4. أدرس الوضع النسبي ل $\left(C_f\right)$ و $(\Delta): y=x$
5. بين أن $(\forall x\in\mathbb{R}): f'(x)=g(x)$ وضع جدول تغيرات الدالة f
6. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $\frac{3}{2}<\alpha<2$
7. أنشئ المنحنى $\left(C_f\right)$

الأستاذ: عزيز حاليب