سلسلة 1: تمارين التكامل والدوال الأصلية

التمرين رقم 01
أحسب التكاملات التالية:

$I_1=\int_0^1 (3x-4)^2\,dx$	$I_2=\int_1^{\sqrt{2}}\left(x^2-\sqrt{2}x\right)dx$
$I_3=\int_1^2 \frac{3x^2+x-1}{x^4}dx$	$I_4=\int_0^1 \frac{2x+1}{3\sqrt{x}}dx$
$I_5=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x-1)dx$	$I_6=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx$
$I_7=\int_{\frac{\pi}{3}}^{-\pi} \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)dx$	$I_8=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)dx$
$I_9=\int_0^1 \frac{3}{2x+1}dx$	$I_{10}=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx$
$I_{11}=\int_0^1 \frac{2e^x}{e^x+1}dx$	$I_{12}=\int_0^1 e^{-x}\left(e^{3x}+1\right)dx$
$I_{14}=\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}dx$	$I_{13}=\int_0^1 \left(2x-3\sqrt[3]{x}\right)dx$
$I_{16}=\int_{-3}^4 \left\|x^2-5x+6\right\|dx$	$I_{15}=\int_0^4 \frac{5}{x^2-3x+2}dx$
$I_{17}=\int_0^1 \frac{1}{(2x-1)^5}dx$	$I_{18}=\int_0^1 \sqrt[4]{3x+2}\,dx$
$I_{20}=\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$	$I_{19}=\int_{-1}^1 \left\|e^x-1\right\|dx$
$I_{23}=\int_1^8 \frac{x+1}{2\sqrt[3]{x}}dx$	$I_{21}=\int_1^2 \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^4}dx$
$I_{24}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} \left\|\sin 2x\right\|dx$	$I_{22}=\int_1^0 \frac{x^2-1}{(x^3-3x+5)^3}dx$

التمرين رقم 02
نعتبر التكاملين التاليين:

$I=\int_0^1 \frac{2x^2}{2+x^3}dx$ و $I=\int_0^1 \frac{x^5}{2+x^3}dx$

1. حدد قيمة التكامل $I+J$ وأحسب التكامل I
2. استنتج قيمة التكامل J

التمرين رقم 03
نعتبر التكاملين التاليين:

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$ $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$

1. أحسب $I+J$ و $I-J$
2. استنتج قيمة كل من I و J

التمرين رقم 04
1. تحقق أن: $(\forall x\in\mathbb{R}):\frac{x^3}{1+x^2}=x-\frac{x}{1+x^2}$
2. أحسب التكامل $I=\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx$

التمرين رقم 05
1. حدد العددين a و b بحيث :

$$(\forall x\in\left]0,1\right[):\frac{1}{1-x^2}=\frac{a}{1-x}+\frac{b}{1+x}$$

2. أحسب التكامل $I=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}dx$

التمرين رقم 06
1. حدد العددين a و b بحيث :

$$(\forall x\in\mathbb{R}-\{-2\}):\frac{2x-1}{x+2}=a+\frac{b}{x+2}$$

2. أحسب التكامل $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)dx$

التمرين رقم 07
نعتبر التكاملين التاليين:

$B=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1-\sin t}dt$ $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin t}dt$

1. أحسب قيمة $A+B$ و $A-B$
2. حدد قيمة كل من A و B

التمرين رقم 08
1. حدد الأعداد الحقيقية a و b و c و d لكل $x\neq 1$ بحيث :

$$\frac{x^3-2x^2+2x-2}{x-1}=ax^2+bx+c+\frac{d}{x-1}$$

2. أحسب التكامل التالي:

$$I=\int_2^{e+1}\left(\frac{x^3-2x^2+2x-2}{x-1}\right)dx$$

التمرين رقم 09
نعتبر التكاملين التاليين:

$I=\int_0^{\pi}\left(e^x.\cos^2 x\right)dx$ $J=\int_0^{\pi}\left(e^x.\sin^2 x\right)dx$

1. أحسب $I+J$ و $I-J$
2. استنتج قيمة كل من I و J

التمرين رقم 10

أحسب التكاملات التالية:

$I=\int_{0}^{\pi}\cos x.\cos(2x)dx$
$J=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos x.\sin(2x)dx$
$K=\int_{0}^{-\frac{\pi}{2}}\cos(x).\sin^2(x)dx$
$L=\int_{0}^{\pi}\cos^3(x).\sin(x)dx$

التمرين رقم 11

أحسب التكاملات التالية:

$I=\int_{0}^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+5}}dx$
$J=\int_{-\ln 2}^{\ln\sqrt{2}}\frac{e^{x}}{(2e^{x}+1)^2}dx$
$K=\int_{0}^{1}(e^x+1)(e^x+x-1)^3dx$
$L=\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)\ln(e^x+1)dx$

التمرين رقم 12

أحسب التكاملات التالية:

$L=\int_{0}^{\pi}(x-1).\sin xdx$	$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}x.\cos(2x)dx$
$J=\int_{0}^{\pi}2x.\cos^2(x)dx$	$K=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2(x)}dx$

التمرين رقم 13

أحسب التكاملات التالية:

$J=\int_{1}^{2}\ln(2x+3)dx$	$I=\int_{1}^{e}(x-2)\ln xdx$
$L=\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}dx$	$K=\int_{1}^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$
$N=\int_{0}^{-1}x.e^{2x+1}dx$	$M=\int_{-\ln 2}^{0}(x+1)e^{-x}dx$
$E=\int_{0}^{1}(2x+1)3^xdx$	$G=\int_{0}^{\ln 2}(x^2+1)e^{2x}dx$
$X=\int_{0}^{\pi}(2x+1)\sin xdx$	$H=\int_{0}^{9}x\log(x+1)dx$
$R=\int_{e}^{\sqrt{e}}\frac{1}{x.(\ln x)^2}dx$	$F=\int_{1}^{e}\frac{(\ln x)^2}{3x}dx$

التمرين رقم 14

لكل $n\in\mathbb{N}$ نضع:

$$J_n=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{-nx}.\cos xdx \quad I_n=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{-nx}.\sin xdx$$

1. أحسب I_0 و J_0
2. باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن:

$$-nI_n+J_n=e^{-n\frac{\pi}{2}} \quad \text{و} \quad I_n+nJ_n=1$$

3. استنتج I_n و J_n بدلالة n
4. أحسب $\lim_{x\to+\infty}I_n$ و $\lim_{x\to+\infty}J_n$

التمرين رقم 15

أحسب التكاملات التالية:

$J=\int_{1}^{e}x^2\ln(x)dx$	$I=\int_{1}^{e}x\ln(2x)dx$
$X=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}x^2\sin xdx$	$K=\int_{1}^{e}x^3\ln(x)dx$
$H=\int_{1}^{e}\frac{(\ln x)^2}{x}dx$	$L=\int_{0}^{1}x\sqrt{1+x}dx$
$M=\int_{1}^{2}\frac{\ln(x)}{x}dx$	$G=\int_{0}^{1}e^x(e^x+1)^3dx$
$R=\int_{0}^{1}\frac{1}{1+e^x}dx$	$N=\int_{1}^{e}\frac{\ln(x)}{x^3}dx$
$Y=\int_{0}^{1}(x^2+1)\sqrt{x^3+3x+1}dx$	
$C=\int_{0}^{1}\frac{2x+1}{x^2-4}dx$	$W=\int_{0}^{1}x^2\sqrt[3]{x^3+1}dx$

التمرين رقم 16

ليكن n عدد صحيح طبيعي.

نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي:

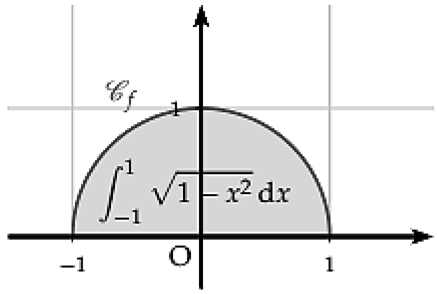
$$f_n(x)=\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$$

ونضع $u_n=\int_{0}^{1}f_n(x)dx$ لكل n عدد صحيح طبيعي.

1. أحسب u_1 ثم بين أن $u_1+u_0=1$ واستنتج u_0
2. بين أن $e^{-nx-x}\le e^{-nx}$ حيث $n\in\mathbb{N}$ و $x>0$
3. استنتج منحى تغيرات المتتالية (u_n)
4. بين أن $0\le u_n\le\int_{0}^{1}e^{-nx}dx$
5. أحسب التكامل $I_n=\int_{0}^{1}e^{-nx}dx$

6. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وأحسب نهايتها.

التمرين رقم 17



بين أن مساحة نصف الدائرة الممثلة في الشكل أعلاه هي:

$$A=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$$

التمرين رقم 18

لكل n عدد صحيح طبيعي نضع $I_n=\int_0^1 x^n.\sqrt{1-x}\,dx$

1. باستعمال طريقة المكاملة بالأجزاء أوجد علاقة بين I_n و I_{n-1}
2. أحسب I_0 و I_n

التمرين رقم 19

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x)=e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)$

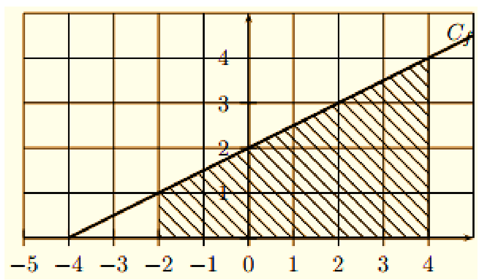
نضع $I(\lambda)=\int_0^{\lambda} f(x)dx$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}^{+}$

1. ما هي إشارة التكامل $I(\lambda)$؟
2. حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث لكل عدد حقيقي x لدينا : $\frac{e^x}{e^x+1}=a+\frac{b}{e^x+1}$
3. أحسب التكامل $J(\lambda)=\int_0^{\lambda}\frac{1}{e^x+1}dx$
4. f' هي مشتقة f . أحسب $f'+f$
5. أحسب التكامل $I(\lambda)$

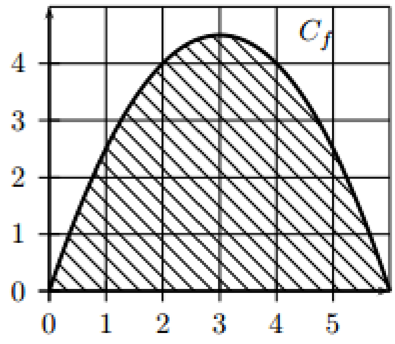
التمرين رقم 20

أحسب مساحة الجزء المخدش في كل حالة.

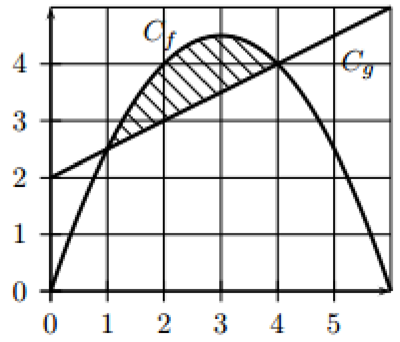
الحالة الأولى: $f(x)=\frac{1}{2}x+2$



الحالة الثانية: $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x$

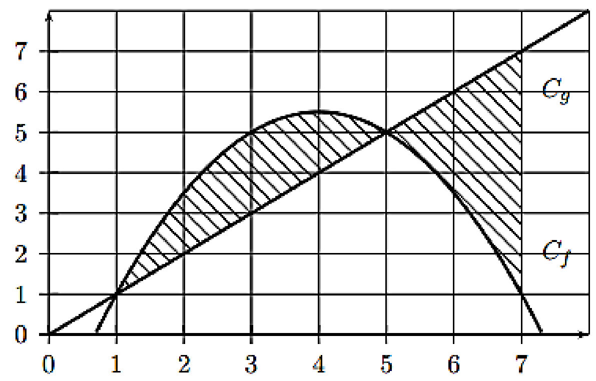


الحالة الثالثة: $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x$ و $g(x)=\frac{1}{2}x+2$



الحالة الرابعة:

$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x-\frac{5}{2}$ و $g(x)=x$



الحالة الخامسة:

أعط تعبير مساحة الجزء الملون أسفله بدلالة الحروف المبينة على الشكل.