سلسلة 1 : تمارين درس الدوال اللوغاريتمية

التمرين الأول:

1. أحسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to0^+} x\ln^3 x$	$\lim\limits_{x\to0^+} x^3\ln x$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^3 x}{x^5}$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^5 x}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x}}$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x-2}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{2x^3-x+1}$
$\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\dfrac{2x+3}{x^2+x-2}\right)$	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+2)\ln x}{3x^2-5x+2}$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(\sqrt{x}+3\right)}{x+1}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x\sqrt{x+1}}$
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-\ln\left(x^2+1\right)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+5-\ln x$
$\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x$	$\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)\ln(1-x)$
$\lim\limits_{x\to0^+} x\ln\left(\dfrac{x}{x+3}\right)$	$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\ln x$
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^4}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+x\right)}{x^2-x}$
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+4x)}{x}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{\sin x}$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{(x+1)^2}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\ln x}{5+\ln x}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln\left(1+2x^2\right)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(x+1\right)-\ln\left(2x\right)$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^2-2x+3\right)}{x+2}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x+\ln x}$
$\lim\limits_{x\to-\infty} 3x+\ln\left(1-x\right)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-3x+\ln^2 x$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(\sqrt{1+x^2}+3\right)}{2x-5}$

2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

$$\ln(x-3)-\ln(1-x)\le\ln(x^2-4)$$

$$\ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right)>1$$

$$\frac{\ln(x+1)}{1-\ln x}\ge0$$

التمرين الثاني:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ ب: $f(x)=x-x\ln(x)$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. أحسب $f'(x)$ على $]0,+\infty[$ وضع جدول تغيرات الدالة f
3. حدد تقاطع $\left(C_f\right)$ منحنى الدالة f مع محور الأفاصيل واستنتج إشارة $f(x)$ على $]0,+\infty[$
4. أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $\left(C_f\right)$
5. حدد معادلة المماس ل $\left(C_f\right)$ في النقطة ذات الأفصول $x_0=1$
6. أنشئ $\left(C_f\right)$ في معلم متعامد ممنظم

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ ب: $f(x)=\dfrac{1+\ln(x)}{x}$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم حدد المستقيمين المقاربين للمنحنى $\left(C_f\right)$
2. أحسب $f'(x)$ على $]0,+\infty[$ وضع جدول تغيرات الدالة f
3. حدد أفصول نقطة تقاطع x_1 $\left(C_f\right)$ مع محور الأفاصيل
4. حدد معادلة المماس $\left(T\right)$ للمنحنى في النقطة ذات الأفصول $x_2=e^{-\frac{1}{2}}$
5. بين أن $\forall x\in\left]0,+\infty\right[: f''(x)=\dfrac{-1+2\ln x}{x^3}$ ثم استنتج أن $\left(C_f\right)$ يقبل نقطة انعطاف يجب تحديدها
6. أرسم المنحنى $\left(C_f\right)$

التمرين الرابع:

الجزء الأول:

نعتبر الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ ب: $g(x)=x-2\ln x$

1. أحسب $g'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$
2. ضع جدول تغيرات الدالة g
3. ضع جدول إشارة $g(x)$ (لاحظ أن $g(2)>0$)

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0,+\infty[$ بمايلي:

$$f(x)=x-\left(\ln x\right)^2$$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ واول النتيجة هندسيا
2. بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$ (يمكن وضع $t=\sqrt{x}$) ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
3. بين أن $\left(C_f\right)$ يقبل فرع شلجمي بجوار $+\infty$ معادلته $y=x$

4. بين أن المنحنى $\left(C_f\right)$ يوجد تحت $\left(\Delta\right)$
5. بين أن $\forall x\in\left]0,+\infty\right[: f^{'}(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ وضع جدول تغيرات الدالة f
6. بين أن $y=x$ هي معادلة المماس $\left(T\right)$ للمنحنى $\left(C_f\right)$ في النقطة ذات الأفصول $x_0=1$
7. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]0,+\infty\right[$ وأن $\dfrac{1}{e}<\alpha<\dfrac{1}{2}$ (نقبل أن $\left(\ln 2\right)^2<\dfrac{1}{2}$).ثم أعط التأويل الهندسي لهذه النتيجة
8. أنشئ المنحنى $\left(C_f\right)$ (نقبل أن $I\left(e,e-1\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى)

الجزء الثالث:

نعتبر المتتالية $\left(u_n\right)$ المعرفة ب: $u_0=2$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

1. بين أن $1\le u_n\le 2$ لكل n من $\mathbb{N}$
2. بين أن المتتالية $\left(u_n\right)$ تناقصية
3. استنتج أن $\left(u_n\right)$ متقاربة ثم حدد نهايتها

التمرين الخامس:

الجزء الأول:

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $\left[0,+\infty\right[$ ب:

$$g(x)=-x+\ln\left(1+x\right)$$

1. أحسب $g^{'}(x)$ لكل $x\in\left[0,+\infty\right[$ ثم بين أن الدالة g تناقصية قطعا على $\left[0,+\infty\right[$
2. بين ان $g(x)\le 0$ لكل $x\in\left[0,+\infty\right[$
3. بين أن $0<\ln\left(1+x\right)<x$ لكل $x\in\left]0,+\infty\right[$

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x)=x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

1. بين ان $D_f=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$
2. بين ان f دالة فردية
3. أحسب $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
4. بين أن $\left(\forall x\in D_f\right): f^{'}(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2-1}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f
5. بين أن $\left(\Delta\right): y=x$ مقارب مائل ل $\left(C_f\right)$
6. تحقق أن $\left(\forall x\in D_f\right): \dfrac{x+1}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$ ثم أدرس إشارة $\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$
7. استنتج الوضع النسبي ل $\left(C_f\right)$ والمستقيم $\left(\Delta\right)$
8. أنشئ $\left(C_f\right)$ نأخذ $\sqrt{3}\simeq 1,7$ و $f\left(\sqrt{3}\right)\simeq 3$

التمرين السادس:

الجزء الأول:

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $\left]0,+\infty\right[$ ب:

$$g(x)=x-\ln\left(x\right)$$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$
2. أحسب $g^{'}(x)$ وضع جدول تغيرات الدالة g
3. استنتج أن $x>\ln x$ لكل $x\in\mathbb{R}_+^*$

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x-\ln x}, x>0 \\ f(0)=-1 \end{cases}$$

1. بين أن $D_f=\left[0,+\infty\right[$
2. بين أن f متصلة على اليمين في الصفر
3. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم حدد الفرع اللانهائي ل $\left(C_f\right)$
4. أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في الصفر ثم اول هندسيا
5. بين أن $f^{'}(x)=\dfrac{2(1-\ln x)}{(x-\ln x)^2}$ لكل $x\in\mathbb{R}_+^*$ وأعط جدول تغيرات f
6. حدد تقاطع $\left(C_f\right)$ والمستقيم $\left(\Delta\right): y=1$
7. بين أن $\left(C_f\right)$ يقطع محور الأفاصيل في نقطة أفصولها ينتمي إلى المجال $\left]\dfrac{1}{2},1\right[$
8. أنشئ $\left(C_f\right)$ نعطي $e\simeq 2,7$ و $\ln 2\simeq 2,7$

التمرين السادس:

نعتبر المتتالية $\left(u_n\right)_{n\ge 1}$ المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=2\sqrt{u_n}, n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية $\left(v_n\right)_{n\ge 1}$ المعرفة ب: $v_n=\ln(u_n)-\ln 4$

1. بين أن $\left(v_n\right)_{n\ge 1}$ هندسية محددا اساسها وحدها الاول
2. بين ان $\left(v_n\right)_{n\ge 1}$ متتالية تزايدية
3. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n$ واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$

****

موقع النجاح في الفيزياء والرياضيات