تمارين درس المتتاليات العددية

التمرين الاول:

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 3}{U_n + 4}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. أحسب U_1 و U_2
2. بين ان $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < U_n < 1$
3. بين أن $(U_n)_{n\geq 0}$ تزايدية و استنتج انها متقاربة
4. نضع $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 3}$ لكل $n \in \mathbb{N}$

a) بين ان (V_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{5}$

b) استنتج U_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n$

c) نضع $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + \dots\dots\dots + V_n$ و $W_n = \sin(\pi S_n)$ حدد S_n بدلالة n وبين ان (W_n) متقاربة و أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} W_n$

التمرين الثاني:

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} U_0 = U_1 = 0 \\ U_{n+2} = \dfrac{2}{5}U_{n+1} - \dfrac{1}{25}U_n \end{cases}, (\forall n \in \mathbb{N})$$

نضع $V_n = U_{n+1} - \dfrac{1}{5}U_n$ و $W_n = 5^n U_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

1. بين أن $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية محددا أساسها وحدها الأول
2. اكتب V_n بدلالة n
3. بين أن $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حسابية محددا أساسها وحدها الاول.
4. أكتب W_n بدلالة n
5. أكتب U_n بدلالة n
6. بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 < U_{n+1} \leq \dfrac{2}{5}U_n$
7. استنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 < U_n \leq \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$

واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n$

التمرين الثالث:

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{5}(U_n - 4n - 1) \end{cases}, (\forall n \in \mathbb{N})$$

نضع $(\forall n \in \mathbb{N}) : V_n = U_n + n - 1$

1. بين أن $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{5}$
2. أكتب V_n بدلالة n ثم استنتج U_n بدلالة n
3. نضع $T_n = V_0 + V_1 + \dots\dots + V_n$ و $S_n = U_0 + U_1 + \dots\dots + U_n$

a) بين أن $T_n = \dfrac{1}{4}\left(5 - \dfrac{1}{5^n}\right)$

b) بين أن $S_n = T_n - \dfrac{(n+1)(n-2)}{2}$

التمرين الرابع:

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{4}\left(1 + \sqrt{U_n}\right)^2 \end{cases}, (\forall n \in \mathbb{N})$$

1. أحسب U_1 و U_2
2. بين ان $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < U_n < 1$
3. بين أن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية
4. نضع $(\forall n \in \mathbb{N}) : V_n = \sqrt{U_n} - 1$

a) بين أن $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{2}$

b) أكتب V_n ثم U_n بدلالة n

c) بين أن :

$$S_n = \sqrt{U_0} + \dots + \sqrt{U_n} = n - 1 + \frac{1}{2^n}$$

التمرين الخامس:

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} U_0=\dfrac{5}{2} \\ U_{n+1}=\dfrac{2}{9}U_n^{\,2}+1 \end{cases}, n\in\mathbb{N}$$

1. بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}): \frac{3}{2}<U_n<3$
2. بين ان $U_{n+1}-U_n=\frac{1}{9}(U_n-3)(2U_n-3)$
3. أدرس رتابة $(U_n)_{n\geq0}$ واستنتج أنها متقاربة
4. بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}): U_{n+1}-3\leq\frac{8}{9}(U_n-3)$
5. بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}): U_n-3\leq\left(\frac{8}{9}\right)^n$

التمرين السادس:

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+3}$

1. أدرس رتابة الدالة f وضع جدول تغيراتها
2. نضع $I=[0,1]$ ما هي رتابة f على المجال I؟
   بين أن $f(I)\subset I$
3. بين ان المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α
   في المجال I
4. لتكن $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} V_0=\dfrac{1}{2} \\ V_{n+1}=f(V_n) \end{cases}, (\forall n\in\mathbb{N})$$

a) أحسب V_1 ثم بين ان $(\forall n\in\mathbb{N}): 0\leq V_n\leq 1$

b) بين أن $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية

c) استنتج أن $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة وحدد نهايتها

التمرين السابع:

f دالة معرفة على المجال $I=\left[0,\sqrt[3]{3}\right]$ بما يلي:

$$f(x)=\frac{9x}{x^3+6}$$

1. أدرس رتابة f على I وبين أن $f(I)\subset I$
2. لتكن $(U_n)_{n\geq0}$ المتتالية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} U_0=\dfrac{1}{2} \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}, (\forall n\in\mathbb{N})$$

a) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}): 0\leq U_n\leq\sqrt[3]{3}$

b) بين أن $(U_n)_{n\geq0}$ متتالية تزايدية

c) استنتج أن $(U_n)_{n\geq0}$ متقاربة وحدد نهايتها

التمرين الثامن:

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} U_0=\dfrac{3}{2} \\ U_{n+1}=\dfrac{3U_n-1}{2U_n} \end{cases}, n\in\mathbb{N}$$

نضع $(\forall n\in\mathbb{N}): V_n=\dfrac{U_n-1}{2U_n-1}$

1. بين ان $(\forall n\in\mathbb{N}): U_n>1$
2. بين أن:

$$(\forall n\in\mathbb{N}): U_{n+1}-U_n=\frac{(1-U_n)(2U_n-1)}{2U_n}$$

3. بين أن المتتالية رتيبة واستنتج أنها متقاربة
4. بين ان المتتالية $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$
5. عبرعن V_n بدلالة n
6. بين أن $\forall n\geq 0: U_n=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1}$
7. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}U_n$ واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}V_n$

التمرين التاسع:

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq1}$ المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} U_1=\dfrac{2}{3} \\ U_{n+1}=\dfrac{2n+2}{3n}U_n \end{cases}, (n\in\mathbb{N}^*)$$

نضع $(\forall n\in\mathbb{N}^*): V_n=\frac{1}{n}U_n$

1. أحسب U_2
2. بين أن $(V_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الاول
3. أكتب V_n ثم U_n بدلالة n
4. أحسب بدلالة n المجموع التالي:

$$S_n=\frac{U_1}{1}+\frac{U_2}{2}+.........+\frac{U_n}{n}$$

5. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}U_n$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}S_n$

التمرين العاشر:

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases}U_0=0\\ U_{n+1}=\frac{1}{4}U_n+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n,(\forall n\in\mathbb{N})\end{cases}$$

1. أحسب U_1 و U_2
2. نضع $V_n=U_n-\left(\frac{3}{4}\right)^n$

a) بين ان (V_n) متتالية هندسية محددا اساسها وحدها الاول

b) أكتب U_n بدلالة n واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}U_n$

التمرين الحادي عشر:

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases}U_0=0\\ U_{n+1}=U_n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-U_n^2\right),(\forall n\in\mathbb{N})\end{cases}$$

1. بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}): 0\leq U_n\leq\frac{1}{2}$
2. أدرس رتابة (U_n)
3. بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}): \frac{1}{2}-U_{n+1}\leq\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}-U_n\right)$
4. بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}): \frac{1}{2}-U_n\leq\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$
5. استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}U_n$

التمرين الثاني عشر:

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases}U_0=1\\ U_{n+1}=\frac{U_n^{\ 3}}{1+3U_n^{\ 2}},(\forall n\in\mathbb{N})\end{cases}$$

1. بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}): U_n>0$
2. بين أن $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية تناقصية
3. استنتج ان $(U_n)_{n\geq 0}$ متقاربة
4. بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}): U_{n+1}\leq\frac{1}{3}U_n$
5. بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}): U_n\leq\left(\frac{1}{3}\right)^n$
6. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}U_n$

التمرين الثالث عشر:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$f(x)=x\sqrt{3-x}$$

1. حدد D_f ثم أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$
2. بين أن $(\forall x\in<3): f'(x)=\frac{3(-x+2)}{2\sqrt{3-x}}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f
3. بين أن $f(x)-x=\frac{x(2-x)}{\sqrt{3-x}+1}$ واستنتج أن $\forall x\in[0,2]: f(x)\geq x$
4. نعتبر المتتالية المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases}U_0=\frac{1}{2}\\ U_{n+1}=f(U_n)\end{cases},(\forall n\in\mathbb{N})$$

a) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}): 0<U_n<2$

b) بين أن $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية رتيبة

c) استنتج ان $(U_n)_{n\geq 0}$ متقاربة وحدد نهايتها