ملخص وتمارين درس المتتاليات للثانية باك علوم تجريبية

7- تعريف متتالية

متتالية هي دالة من $\mathbb{N}$ أو جزء من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}$

نرمز لمتتالية ب (U_n) أو $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. U_n يسمى الحد العام للمتتالية (U_n).

← المتتالية المعرفة بصيغتها الصريحة

هي المتتالية التي يمكن تحديد كل حد من حدودها مباشرة.

مثال: لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا $U_n = 5n+6$. مثلا يمكن حساب U_{100} مباشرة $U_{100} = 5\times 100+6 = 506$

← المتتالية المعرفة بصيغة ترجعية

هي المتتالية التي لا يمكن تحديد حد من حدودها إلا بحساب الحد الذي يسبقه.

مثال: لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا $U_n = 2U_{n-1}+1$ و $U_0=-5$. مثلا لا يمكن حساب U_{100} إلا بعد حساب U_{99}.

8- المتتالية الحسابية

← السؤال: بين أن (U_n) متتالية حسابية

للجواب نبين ان $\boxed{U_{n+1}-U_n = r \neq 0}$ حيث r يسمى أساس المتتالية الحسابية.

← السؤال: اكتب U_n بدلالة n

للجواب نستعمل صيغة الحد العام لمتتالية حسابية والذي يكتب على الشكل التالي: $\boxed{U_n = U_p+(n-p)r}$ حيث U_p هو الحد الاول للمتتالية الحسابية.

ملاحظة1:

← في حالة $n\in\mathbb{N}$ لدينا $U_p = U_0$ و $p=0$

← في حالة $n\in\mathbb{N}^*$ لدينا $U_p = U_1$ و $p=1$

← في حالة $n\geq 3$ لدينا $U_p = U_3$ و $p=3$

← في حالة $n>3$ لدينا $U_p = U_4$ و $p=4$

← السؤال: أحسب المجموع S_n حيث:

$$S_n = U_p+U_{p+1}+\dots\dots\dots+U_n$$

للإجابة نستعمل الصيغة العامة التالية:

$$\boxed{S_n = \left(\frac{n-p+1}{2}\right)(U_p+U_n)}$$

9- المتتالية الهندسية

← السؤال: بين أن (U_n) متتالية هندسية.

للجواب نبين ان $\boxed{U_{n+1} = q\times U_n}$ حيث $q\neq 0$ يسمى أساس المتتالية الهندسية.

← السؤال: اكتب U_n بدلالة n

للجواب نستعمل صيغة الحد العام لمتتالية هندسية والذي يكتب على الشكل التالي: $\boxed{U_n = U_p\times q^{(n-p)}}$ حيث U_p هو الحد الاول للمتتالية الهندسية.

ملاحظة2: نفس الخاصية السابقة تبقى صالحة

← في حالة $n\in\mathbb{N}$ لدينا $U_p = U_0$ و $p=0$

← في حالة $n\in\mathbb{N}^*$ لدينا $U_p = U_1$ و $p=1$

← في حالة $n\geq 3$ لدينا $U_p = U_3$ و $p=3$

← في حالة $n>3$ لدينا $U_p = U_4$ و $p=4$

← السؤال: أحسب المجموع S_n حيث:

$$S_n = U_p+U_{p+1}+\dots\dots\dots+U_n$$

للإجابة نستعمل الصيغة العامة التالية:

$$\boxed{S_n = U_p\times\left(\frac{1-q^{(n-p+1)}}{1-q}\right)} \quad \text{حيث} \quad \boxed{q\neq 1}$$

ملاحظة3:

في حالة $\boxed{q=1}$ صيغة المجموع هي:

$$S_n = U_p+U_{p+1}+\dots\dots\dots+U_{n-1}$$

$$\boxed{S_n = U_p\times(n-p)}$$

4. نهاية متتالية عددية

← $\lim\limits_{x\to+\infty}(q)^n$ حيث q عدد حقيقي غير منعدم.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(q)^n = +\infty$ إذا كان $q>1$
$\lim\limits_{x\to+\infty}(q)^n = 0$ إذا كان $-1<q<1$
$\lim\limits_{x\to+\infty}(q)^n = 1$ إذا كان $q=1$
النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}(q)^n$ غير موجودة في حالة $q\leq -1$

← $\lim\limits_{x\to+\infty} n^{\alpha}$ حيث $\alpha\in\mathbb{Q}^*$

$\lim\limits_{x\to+\infty} n^{\alpha} = +\infty$ إذا كان $\alpha>0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} n^{\alpha} = 0$ إذا كان $\alpha<0$

← إذا كانت (U_n) و (V_n) متتاليتان تحققان ما يلي :

$V_n\leq U_n$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} V_n = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n = +\infty$

← إذا كانت (U_n) و (V_n) متتاليتان تحققان ما يلي :

$V_n\leq U_n$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n = -\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} V_n = -\infty$

← إذا كانت $V_n\leq U_n\leq W_n$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} V_n = l$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} W_n = l$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n = l$

← إذا كانت $|U_n-l|\leq V_n$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} V_n = 0$ فإن

$\lim\limits_{x\to+\infty} U_n = l$.

5. المتتالية التزايدية – المتتالية التناقصية

← نقول أن متتالية (U_n) تزايدية إذا و فقط إذا كان لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا $\boxed{U_{n+1}-U_n\geq 0}$

← نقول أن متتالية (U_n) تناقصية إذا و فقط إذا كان لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا $\boxed{U_{n+1}-U_n\leq 0}$

6. المتتالية المكبورة – المتتالية المصغورة

← نقول أن المتتالية (U_n) مكبورة بالعدد M إذا و فقط إذا كان لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا $\boxed{U_n\leq M}$

← نقول أن المتتالية (U_n) مصغورة بالعدد m إذا و فقط إذا كان لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا $\boxed{U_n\geq m}$

← نقول أن المتتالية (U_n) محدودة إذا كانت مكبورة و مصغورة

يعني $\boxed{m\leq U_n\leq M}$ أو $\boxed{|U_n|\leq M}$

7. المتتالية المتقاربة

← إذا كانت (U_n) تزايدية ومكبورة فإنها متقاربة

← إذا كانت (U_n) تناقصية ومصغورة فإنها متقاربة

← إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}U_n=k\neq\infty$ فإن (U_n) متقاربة

← كل متتالية سالبة وتزايدية هي متقاربة

← كل متتالية موجبة وتناقصية هي متقاربة

8. كيف نحدد نهاية متتالية معرفة ب $U_{n+1}=f(U_n)$

(U_n) متتالية معرفة ب $\begin{cases}U_{n+1}=f(U_n)\\ U_p\in I\end{cases}$ حيث الدالة f متصلة على المجال I.

إذا كانت:

- المتتالية (U_n) متقاربة
- $f(I)\subset I$

فإن l نهاية المتتالية (U_n) هي حل للمعادلة $f(x)=x$

ولتحديد هذه النهاية نتبع المراحل التالية:

← نبين أن f متصلة على I

← نبين أن $f(I)\subset I$

← يجب أن تكون المتتالية (U_n) متقاربة

← نحل المعادلة $f(x)=x$

✓ إذا كان للمعادلة حل واحد l فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}U_n=l$

✓ إذا كان للمعادلة أكثر من حل نقوم بإقصاء الحلول الغير المنسجمة مع خاصيات (U_n)

دروس الدعم في الفيزياء والرياضيات

الأستاذ: عزيز حاليب

2018

سلسلة تمارين المتتاليات

التمرين الأول:

أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}U_n$ في كل حالة من الحالات التالية:

$U_n=5n^2-n+4$	$U_n=n-\sqrt{n^2+1}$
$U_n=n-\sqrt[3]{n^3+1}$	$U_n=\sqrt{n^2+n+1}$
$U_n=\sqrt{\dfrac{2n+1}{n+1}}$	$U_n=\dfrac{n^3+2n}{n^2-n+3}$
$U_n=\dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+4)^2}$	$U_n=\dfrac{1-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n-2}+3}$
$U_n=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+.....+\dfrac{n}{n^2}$	
$U_n=1+\dfrac{5}{9}+\dfrac{5}{9^2}+.....+\dfrac{5}{9^n}$	
$U_n=\dfrac{5^{n+1}-3^n}{3^{n+2}+1}$	$U_n=\sin\left[(1-\sqrt{3})^n\pi\right]$
$U_n=7^n-9^n$	$U_n=n\left(5^{1-n}+3^{2n}\right)$

التمرين الثاني:

نعتبر المتتالية المعرفة لكل عدد طبيعي n ب:

$$\begin{cases}U_{n+1}=\dfrac{U_n}{1+(U_n)^2}\\ U_0=\dfrac{3}{4}\end{cases}$$

نضع $U_{n+1}=f(U_n)$ حيث $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

1. بين أن f تزايدية على المجال $I=[0,1]$
2. أحسب $f([0,1])$ وبين أن $f(I)\subset I$
3. بين أن $\forall n\in\mathbb{N},0\leq U_n\leq 1$
4. بين أن المتتالية (U_n) تناقصية
5. استنتج أن (U_n) متقاربة ثم حدد نهايتها

التمرين الثالث:

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة ب: $U_n=n^2+\sin(n)$

1. بين أن $n^2-1\leq n^2+\sin(n)$
2. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}U_n$

التمرين الرابع:

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $\begin{cases}U_{n+1}=U_n^{\,2}+U_n\\ U_0=1\end{cases}$

1. بين أن $\forall n\in\mathbb{N},U_n\geq 2^n$

-10 أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n$

التمرين الخامس:

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة ب: $U_n=\sqrt{n}-n$

1. بين أن $\forall n>4, \sqrt{n}-n<-\sqrt{n}$
2. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n$

التمرين السادس:

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة ب: $U_n=-n^2+\cos(3n)$

1. بين أن $\forall n\in\mathbb{N}, U_n\leq -n^2+1$
2. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n$

التمرين السابع:

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة ب: $U_n=3+\frac{(-1)^n}{n} \,/\, n\geq 1$

1. بين أن $|U_n-3|\leq\frac{1}{n}$
2. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n$

التمرين الثامن:

نعتبر (U_n) المعرفة ب: $\begin{cases} U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+1 \\ U_0=1 \end{cases}$ حيث $n\in\mathbb{N}$

1. بين أن $\forall n\in\mathbb{N}, U_n\leq 2$
2. أدرس رتابة المتتالية (U_n)
3. استنتج ان (U_n) متقاربة

التمرين التاسع:

نعتبر (U_n) المعرفة ب: $\begin{cases} U_{n+1}=\sqrt{U_n+12} \\ U_0=1 \end{cases}$ حيث $n\in\mathbb{N}$

1. بين أن $\forall n\in\mathbb{N}, 0<U_n<4$
2. بين أن المتتالية (U_n) تزايدية
3. استنتج ان (U_n) متقاربة

التمرين العاشر:

(U_n) متتالية معرفة ب: $\begin{cases} U_{n+1}=\frac{3U_n+2}{U_n+4} \\ U_0=2 \end{cases}$ حيث $n\in\mathbb{N}$

1. بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}), 1<U_n<3$
2. أدرس رتابة المتتالية (U_n)
3. نعتبر المتتالية (V_n) بحيث $V_n=\frac{U_n-1}{U_n+2}$ حيث $n\in\mathbb{N}$

a) بين أن (V_n) هندسية محددا أساسها وحدها الأول

b) حدد V_n بدلالة n

c) حدد U_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n$

-4 نضع $G_n=\sum\limits_{k=1}^{k=n} V_n$ و $S_n=\sum\limits_{k=1}^{k=n}\frac{3}{U_n+2}$

a) أحسب G_n بدلالة n

b) تحقق ان $\frac{3}{U_n+2}=1-V_n$

c) استنتج S_n بدلالة n

التمرين الحادي عشر:

(U_n) متتالية معرفة ب: $\begin{cases} U_{n+1}=\frac{7U_n-25}{U_n-3} \\ U_0=11 \end{cases}$ حيث $n\in\mathbb{N}$

1. بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}): U_n\neq 5$
2. بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}), 5\leq U_n\leq 11$
3. أدرس رتابة المتتالية (U_n)
4. نعتبر المتتالية (V_n) بحيث $V_n=\frac{1}{U_n-5}$ حيث $n\in\mathbb{N}$

a) بين أن (V_n) حسابية أساسها $\frac{1}{2}$ محددا حدها الأول

b) حدد V_n بدلالة n

c) حدد U_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n$

-5 نضع $S_n=\frac{1}{U_0-5}+\frac{1}{U_1-5}+\ldots+\frac{1}{U_n-5}$

أحسب S_n بدلالة n.

التمرين الثاني عشر:

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$\begin{cases} U_{n+1}=\frac{8(U_n-1)}{U_n+2} \\ U_0=3 \end{cases}$ حيث $(\forall n\in\mathbb{N})$

1. بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}), 2<U_n<4$
2. أدرس رتابة المتتالية (U_n) واستنتج أنها متقاربة
3. بين ان $(\forall n\in\mathbb{N}): 4-U_{n+1}\leq\frac{4}{5}(4-U_n)$
4. بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}): 4-U_n\leq\left(\frac{4}{5}\right)^n$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n$
5. نضع $V_n=\frac{U_n-4}{U_n-2}$ حيث $n\in\mathbb{N}$

a) أثبت أن (V_n) متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الاول

b- حدد V_n ثم U_n بدلالة n و استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n$

6. نضع $S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_{n-1}$ لكل $n \geq 1$

أحسب S_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n$

التمرين الثالث عشر:

لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}): U_{n+1} = \dfrac{1}{4}U_n + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n \\ U_0 = 2 \end{cases}$$

نضع لكل n من $\mathbb{N}$ $V_n = U_n - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

1. بين أن المتتالية (V_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{4}$
2. بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}): U_n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n + \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$
3. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n$
4. نضع $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

أحسب S_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n$

التمرين الرابع عشر:

لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}): U_{n+2} = \dfrac{1}{27}(12U_{n+1} - U_n) \\ U_0 = 2, U_1 = \dfrac{4}{9} \end{cases}$$

نضع لكل n من $\mathbb{N}$ $V_n = U_n - \dfrac{1}{3^n}$

1. بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}): U_{n+1} = \dfrac{1}{9}U_n + \dfrac{2}{3^{n+2}}$
2. بين أن (V_n) متتالية هندسية محددا اساسها وحدها الاول
3. حدد V_n بدلالة n
4. هل المتتالية (U_n) متقاربة؟

التمرين الخامس عشر:

لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}): U_{n+1} = \sqrt[3]{3U_n + 1} - 1 \\ U_0 = 1 \end{cases}$$

1. بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 \leq U_n \leq 1$
2. أدرس رتابة (U_n)
3. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n$

التمرين السادس عشر:

لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $]1,+\infty[$ بما يلي:

$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x} - 1}$ وليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم.

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. أدرس قابلية اشتقاق f على يمين الصفر
3. بين أن $(\forall x \in]1,+\infty[): f'(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{2\left(\sqrt{x} - 1\right)^2}$
4. ضع جدول تغيرات الدالة f
5. أدرس الوضع النسبي ل (C_f) والمستقيم $(\Delta): y = x$
6. لتكن (U_n) المتتالية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}): U_{n+1} = f(U_n) \\ U_0 = 5 \end{cases}$$

أ. بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}), U_n \geq 4$

ب. بين أن المتتالية (U_n) تناقصية

ت. استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة وحدد نهايتها

التمرين السابع عشر:

لتكن الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$f(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{3 + x^2}$ وليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم.

1. أدرس تغيرات الدالة f
2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = x$
3. بين أن $(\forall x \in [0,1[): f(x) > x$
4. لتكن (U_n) المتتالية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}): U_{n+1} = f(U_n) \\ U_0 = 0 \end{cases}$$

a. بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 \leq U_n < 1$

b. أدرس رتابة المتتالية (U_n) وحدد نهايتها

6- لتكن (V_n) المتتالية حيث: $(\forall n \in \mathbb{N}): V_n = U_n^{\,2} - 1$

a. بين أن (V_n) متتالية هندسية محددا اساسها وحدها الاول

b. حدد V_n بدلالة n

c. حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n$

حظ موفق للجميع