

Série des exercices pour les polynômes

EXERCICE 1

On considère le polynôme $P(x)$ tel que : $P(x) = -3x^3 + 4x^2 + 5x - 2$

1. Calculer $(1 + \sqrt{2})^2$ et $(1 + \sqrt{2})^3$ et calculer $P(1 + \sqrt{2})$
2. Montrer que 2 est une racine du polynôme $P(x)$. Puis déterminer un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - 2)Q(x)$
3. Montrer que $Q(x)$ est divisible par $(x + 1)$. puis donner une factorisation pour $Q(x)$
4. Ecrire $P(x)$ sous forme d'un produit de trois polynômes de premier degré
5. On considère le polynôme $A(x)$ tel que : $A(x) = P(x) - (5x - 4)Q(x)$
 - a) Montrer que $A(x) = (-4x + 2)(x + 1)(-3x + 1)$
 - b) Résoudre dans l'ensemble \mathbb{R} l'équation $A(x) = 0$
 - c) Résoudre dans l'ensemble \mathbb{R} l'inéquation $A(x) \geq 0$ et l'inéquation $A(x) < 0$
6. On suppose dans cette question que $|x - 2| < 1$
Donner un encadrement pour $A(x)$

EXERCICE 2

On considère le polynôme $A(x)$ tel que : $A(x) = -3x^2 + x + 4$

1. Vérifier que $A(x) = (x + 1)(4 - 3x)$
2. On suppose que : $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{3}$
 - a) Montrer que $\frac{1}{6} < x < \frac{5}{6}$ et $\frac{3}{2} < -3x + 4 < \frac{7}{2}$
 - b) Montrer que $\frac{7}{4} < A(x) < \frac{77}{12}$

EXERCICE 3

On considère les deux polynômes suivants : $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$ et $Q(x) = (ax + b)(x - 1)$

Déterminer a et b tel que : $P(x) = Q(x)$

EXERCICE 4

Soit $P(x)$ un polynôme tel que : $P(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4$

1. Calculer $P(1)$, puis déterminer un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - 1)Q(x)$
2. Déterminer les deux nombres a et b tel que : $(ax + b)(x - b) = 3x^2 - 4x - 4$
3. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $3x^2 - 4x - 4 = 0$
4. En déduire les solutions de l'équation $P(x) = 0$

EXERCICE 5

Soit $P(x)$ un polynôme tel que : $P(x) = x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4$

1. Déterminer a et b tel que : $P(x) = (x^2 + 3x)^2 + a(x^2 + 3x) + b$
2. Vérifier que : $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$
3. Factoriser le polynôme $P(x)$ et résoudre l'équation $P(x) = 0$
4. Résoudre l'inéquation $P(x) < 0$

EXERCICE 6

Soit $P(x)$ un polynôme tel que : $P(x) = (x-2)^{3n} + (x-1)^{2n} - 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$

1. Montrer qu'il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x-2)Q(x)$
2. Déterminer le degré du polynôme $Q(x)$
3. Calculer $P(1)$ en fonction de n puis déterminer les valeurs de n pour lesquelles $P(x)$ soit divisible par $(x-1)$.

EXERCICE 7

Déterminer les nombres a et b et c tels que : $x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = (a^2 + bx + c)^2$

EXERCICE 8

Soit $P(x)$ un polynôme tel que : $P(x) = 4x^4 - 12x^3 + 13x^2 - 6x + 1$

Déterminer un polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x) = (Q(x))^2$

EXERCICE 9

$P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes tels que :

$$P(x) = 12x^4 - 36x^3 + 47x^2 - 30x + 7 \text{ et } Q(x) = (2x^2 - 3x + 1)(ax^2 + bx + c)$$

Déterminer a et b et c tels que $P(x) = Q(x)$

EXERCICE 10

On considère le polynôme $P(x)$ tel que : $P(x) = (x^n - 1)(x^{n+1} - 1)$ et $n \in \mathbb{N}^*$

1. Montrer que $P(-1) = 0$
2. Montrer qu'il existe un polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x-1)^2(x+1)Q(x)$
3. Déterminer le degré de $Q(x)$

EXERCICE 11

Soit a un nombre réel non nul. On considère les deux polynômes :

$$P(x) = x^2 - ax + 1 \text{ et } Q(x) = x^4 - (a^3 - 2a)x + a^2 - 1$$

Déterminer le polynôme $H(x)$ tel que $Q(x) = P(x) \times H(x)$

EXERCICE 12

On considère le polynôme $P(x)$ tel que : $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2$ et soit α une racine de $P(x)$.

1. Montrer que $\alpha \neq 0$
2. Montrer que $\frac{1}{\alpha}$ est une racine de $P(x)$
3. Montrer que 1 est une racine de $P(x)$
4. Factoriser le polynôme $P(x)$

EXERCICE 13

On considère le polynôme $P(x)$ tel que : $P(x) = x^3 - (a+1)x^2 + (a-2)x + 2a$

1. Déterminer a pour que 0 soit une racine de $P(x)$
2. Déterminer a pour que 1 soit une racine de $P(x)$
3. Déterminer le reste de la division Euclidienne de $P(x)$ sur $(x+1)$

دروس الدعم في الرياضيات والفيزياء