ملخص الاشتقاق ودراسة الدوال العددية

1. الفروع اللانهائية

← إذا كان $\lim_{x\to\infty} f(x)=b$ فإن المستقيم ذو المعادلة $y=b$ مقارب افقي ل (C_f) بجوار ∞

← إذا كان $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ فإن المستقيم ذو المعادلة $x=a$ مقارب عمودي ل (C_f)

← إذا كان $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ نحسب $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ وهناك ثلاث حالات:

- ✓ الحالة 1: $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ في هذه الحالة (C_f) يقبل فرع شلجمي في اتجاه (Ox) بجوار ∞
- ✓ الحالة 2: $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$ في هذه الحالة (C_f) يقبل فرع شلجمي في اتجاه (Oy) بجوار ∞
- ✓ الحالة 3: $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ في هذه الحالة نحسب $\lim_{x\to\infty} f(x)-ax$ وهناك حالتين:
  - الحالة 1: $\lim_{x\to\infty} f(x)-ax=\infty$ في هذه الحالة (C_f) يقبل فرع شلجمي في اتجاه المستقيم ذو المعادلة $y=ax$ بجوار ∞
  - الحالة 2: $\lim_{x\to\infty} f(x)-ax=b$ في هذه الحالة (C_f) يقبل مقارب مائل (Δ) بجوار ∞ معادلته $y=ax+b$

2. قواعد الاشتقاق

$(u\times v)'=u'.v+u.v'$	$(u^n)'=n.u'.u^{n-1}$	$(\cos(ax+b))'=-a\sin(ax+b)$	$(u+v)'=u'+v'$
$(\sqrt[n]{u})'=\frac{u'}{n\times\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\left(\frac{k}{u}\right)'=\frac{-k.u'}{u^2}$	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'.v-u.v'}{v^2}$
$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$	$(k\times u)'=k\times(u)'$	$(\sin(ax+b))'=a\cos(ax+b)$	$(x^n)'=n.x^{n-1}$

3. تقاطع (C_f) مع محوري المعلم

← لتحديد تقاطع (C_f) مع محور الأراتيب نحسب $f(0)$. مثلا $f(0)=\alpha$ يعني أن (C_f) يقطع (Oy) في النقطة $A(0,\alpha)$

← لتحديد تقاطع (C_f) مع محور الأفاصيل نحل المعادلة $f(x)=0$. عدد حلول المعادلة هو عدد أفاصيل نقط تقاطع (C_f) مع (Ox) .مثلا إذا كانت المعادلة تقبل حلين هما α و β فإن (C_f) يقطع (Ox) في نقطتين هما $A(\alpha,0)$ و $B(\beta,0)$.أما إذا كانت المعادلة $f(x)=0$ لا تقبل حل فإنه لا يوجد تقاطع بين (C_f) و (Ox) .

4. تقاطع (C_f) مع $(\Delta):y=ax+b$

← السؤال: ادرس تقاطع (C_f) مع $(\Delta):y=ax+b$

← الجواب: نحل المعادلة $f(x)=ax+b$. نفترض أن للمعادلة حل واحد مثلا هو δ .في هذه الحالة (C_f) و (Δ) يتقاطعان في نقطة واحدة هي $A(\delta,f(\delta))$. في حالة معادلة لا تقبل حل فإن (C_f) و (Δ) لا يتقاطعان.

5. دراسة الوضع النسبي ل (C_f) و $(\Delta):y=ax+b$

لدراسة الوضع النسبي ل (C_f) و $(\Delta):y=ax+b$ على مجال I ندرس إشارة الفرق $f(x)-(ax+b)$ على المجال I .

← $f(x)-(ax+b)<0 \Leftarrow$ (C_f) تحت (Δ) على I

← $f(x)-(ax+b)>0 \Leftarrow$ (C_f) فوق (Δ) على I

6. بين أن المستقيم $(\Delta):y=ax+b$ مقارب مائل ل (C_f) بجوار ∞

للإجابة عن هذا السؤال نبين ان $\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x)-(ax+b)=0}$

7. مركز تماثل منحنى دالة

f دالة و (C_f) المنحنى الممثل لهذه الدالة في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

النقطة $\Omega(a,b)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f) إذا وفقط إذا كان: $\boxed{\begin{cases}(2a-x)\in D_f\\ f(2a-x)=2b-f(x)\end{cases}}$

8. محور تماثل منحنى دالة

f دالة و (C_f) المنحنى الممثل لهذه الدالة في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

يكون المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=a$ محور تماثل للمنحنى (C_f) إذا وفقط إذا كان $\boxed{\begin{cases}(2a-x)\in D_f\\ f(2a-x)=f(x)\end{cases}}$

9. معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الأفصول x_0

المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الأفصول x_0 معادلته هي: $\boxed{y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$

10. نقط انعطاف وتقعر وتحدب منحنى دالة

لتحديد نقط انعطاف المنحنى (C_f) نحسب الدالة المشتقة الثانية $f''(x)$ ثم نحل المعادلة $f''(x)=0$ ونحدد إشارة $f''(x)$.

← إذا كانت $f''(x)$ موجبة على مجال I فإن للمنحنى (C_f) تقعرا موجها نحو الأراتيب الموجبة نرمز له ب $\boxed{\cup}$ ونقول انه **محدب**

← إذا كانت $f''(x)$ سالبة على مجال I فإن للمنحنى (C_f) تقعرا موجها نحو الأراتيب السالبة نرمز له ب $\boxed{\cap}$ ونقول أنه **مقعر**

← إذا كانت $f''(x)$ تنعدم في x_0 من I وتتغير إشارتها بجوار x_0 ، فإن النقطة $A(x_0,f(x_0))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

11. دراسة قابلية اشتقاق دالة

الاشتقاق في x_0	الاشتقاق على يمين x_0	الاشتقاق على يسار x_0
نحسب $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ - إذا كان $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=k$ f قابلة للاشتقاق في x_0 و (C_f) يقبل مماس في النقطة $A(x_0,f(x_0))$ معادلته هي $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ حيث $f'(x_0)=\mathrm{k}$ - إذا كان $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\infty$ f غير قابلة للاشتقاق في x_0 . ------------------------------------ تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا كانت قابلة للاشتقاق على اليمين و على اليسار في x_0 و $\mathrm{k}_1=\mathrm{k}_2$ يعني $f'_d(x_0)=f'_g(x_0)$ **الأستاذ: حاليب**	- إذا كان $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=k_1$ فإن f قابلة للاشتقاق على يمين x_0 و (C_f) يقبل نصف مماس على يمين $A(x_0,f(x_0))$ معادلته هي $y=k_1(x-x_0)+f(x_0)$ - إذا كان $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0 و (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الاعلى في النقطة $A(x_0,f(x_0))$ - إذا كان $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0 و (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(x_0,f(x_0))$	- إذا كان $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=k_2$ فإن f قابلة للاشتقاق على يسار x_0 و (C_f) يقبل نصف مماس على يسار $A(x_0,f(x_0))$ معادلته هي $y=k_2(x-x_0)+f(x_0)$ - إذا كان $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0 و (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الاعلى في النقطة $A(x_0,f(x_0))$ - إذا كان $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0 و (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(x_0,f(x_0))$

12. قواعد تحديد مجموعة تعريف دالة

$f(x)=\sqrt{P(x)} \rightarrow \boxed{P(x)\geq 0}$	$f(x)=\sqrt{\lvert P(x)\rvert} \rightarrow \boxed{D_f=\mathbb{R}}$
$f(x)=\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}} \rightarrow \boxed{\frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0..et..Q(x)\neq 0}$	$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)} \rightarrow \boxed{Q(x)\neq 0}$
$\boxed{f(x)=\frac{\sqrt{P(x)}+u(x)}{Q(x)} \rightarrow \boxed{P(x)\geq 0..et..Q(x)\neq 0}}$	$\boxed{f(x)=\frac{\sqrt{\lvert P(x)\rvert}+u(x)}{Q(x)} \rightarrow \boxed{Q(x)\neq 0}}$
$f(x)=\frac{P(x)}{\sqrt{\lvert Q(x)\rvert}} \rightarrow \boxed{Q(x)\neq 0}$	$f(x)=\sqrt{\left\lvert\frac{P(x)}{Q(x)}\right\rvert} \rightarrow \boxed{Q(x)\neq 0}$
$f(x)=\sqrt{R(x)}+\frac{P(x)}{Q(x)} \rightarrow \boxed{Q(x)\neq 0..et..R(x)\geq 0}$	$f(x)=\frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}} \rightarrow \boxed{Q(x)>0}$
$f(x)=\frac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}} \rightarrow \boxed{P(x)\geq 0..et..Q(x)>0}$	$\sqrt{k(x)+\sqrt{P(x)}} \rightarrow \boxed{k(x)+\sqrt{P(x)}\geq 0..et..P(x)}$

13. حيز أو مجموعة دراسة دالة

إذا كان منحنى دالة f يقبل نقطة تماثل (مركز تماثل) أو مستقيما معادلته $x=a$ كمحور تماثل فإنه يكفي دراسة الدالة f على المجموعة $D_f\cap[a,+\infty[$.

14. دراسة زوجية دالة عددية

- ← f دالة زوجية إذا وفقط إذا كان لكل x من D_f يكون $-x\in D_f$ و $f(-x)=f(x)$. في هذه الحالة $\left(C_f\right)$ يكون متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب.
- ← f دالة فردية إذا وفقط إذا كان لكل x من D_f يكون $-x\in D_f$ و $f(-x)=-f(x)$. في هذه الحالة $\left(C_f\right)$ يكون متماثل بالنسبة لأصل المعلم

15. مراحل إنشاء $\left(C_f\right)$ منحنى الدالة f

- ← ننشئ معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ونحدد على محور أفاصيله مجموعة تعريف الدالة f
- ← ننشئ المقاربات المائلة والأفقية والعمودية إن وجدت
- ← ننشئ مماسات $\left(C_f\right)$ إن وجدت
- ← ننشئ في المعلم نقط تقاطع $\left(C_f\right)$ مع محوري المعلم
- ← ننشئ نقط تقاطع المنحنى $\left(C_f\right)$ مع مقارباته إن كان هناك تقاطع بينهم
- ← نشئ المماسات الموازية لمحور الأفاصيل (عندما تنعدم الدالة المشتقة)
- ← نربط جدول تغيرات الدالة بمحاور المعلم وهي أهم مرحلة في مراحل الإنشاء
- ← ننشئ المنحنى $\left(C_f\right)$ مع مراعاة التقعر ووضع المنحنى بالنسبة لمقارباته

16. إنشاء $\left(C_{f^{-1}}\right)$ منحنى الدالة العكسية f^{-1} للدلة f

❖ $\left(C_f\right)$ و $\left(C_{f^{-1}}\right)$ متماثلان بالنسبة للمنصف الأول للمعلم يعني متماثلان بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=x$.

الأستاذ: عزيز حاليب

دروس الدعم في الرياضيات والفيزياء

الثانية باك علوم تجريبية