

تمارين حول درس مفاهيم في المنطق

السنة الأولى من سلك الباك

التمرين الأول: نفى وحقيقة عبارة

حدد نفي وقيمة حقيقة كل عبارة من العبارات التالية:

$$P_1: " \exists x \in \mathbb{R}, 2x + 3 > 7 "$$

$$P_2: " \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} / n = 2k "$$

$$P_3: " \forall x \in]-\infty, 0], x^2 > 0 "$$

$$P_4: " \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x + y < 13 \text{ و } x > 10) "$$

$$P_5: " \forall x \in [2, 6], 3 < x < 8 "$$

$$P_6: " \forall x \in \mathbb{R}, (x > 2 \Rightarrow x + 3 > 5) "$$

$$P_7: " 2 = 3 \Rightarrow 4 + 5 = 6 "$$

$$P_8: " 3 > 0 \Rightarrow 2 \neq 1 "$$

$$P_9: " \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x^4 - x + 1 = 0 "$$

$$P_{10}: " \sqrt{3} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow 1 = -1 "$$

$$P_{11}: " \sqrt{3} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{R} "$$

$$P_{12}: " \forall a \in \mathbb{R}^+, \sqrt{a+1} = \sqrt{a} + 1 "$$

$$P_{13}: " \forall a \in \mathbb{R}^+, \sqrt{a+1} \neq \sqrt{a} + 1 "$$

$$P_{14}: " \exists a \in \mathbb{R}^+, \sqrt{a+1} = \sqrt{a} + 1 "$$

$$P_{15}: " \exists a \in \mathbb{R}^+, \sqrt{a+1} \neq \sqrt{a} + 1 "$$

$$P_{16}: " \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq x "$$

$$P_{17}: " (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : 3x - y \neq 1 "$$

$$P_{18}: " (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : y^2 - 2xy + 3 \neq 0 "$$

$$P_{19}: " (\forall x \in \mathbb{R}), -2 < x < 3 \Rightarrow |x| < 3 "$$

$$P_{20}: " (\forall x \in \mathbb{R}), -3 < x < 1 \Rightarrow |x| < 3 "$$

$$P_{21}: " (\forall x \in \mathbb{R}), |x| < 3 \Rightarrow -2 < x < 3 "$$

$$P_{22}: " (\forall x \in \mathbb{R}), |x| < 3 \Rightarrow -3 < x < 1 "$$

التمرين الثاني: نفى وحقيقة عبارة

نعتبر العبارة التالية:

$$P: " (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}), x^2 - xy + y^2 = 0 "$$

1. حدد نفي العبارة P

2. استنتج ان العبارة P عبارة خاطئة

التمرين الثالث: حقيقة عبارة

حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات التالية:

$$P_1: " (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}), y + x + 1 = 0 "$$

$$P_2: " (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}), y + x + 1 = 0 "$$

$$P_3: " (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}), y + x + 1 = 0 "$$

$$P_4: " (\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}), y + x + 1 = 0 "$$

$$P_5: " (\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}), y + x + 1 = 0 "$$

$$P_6: " (\forall x \in \mathbb{R})(\exists! y \in \mathbb{R}), y + x + 1 = 0 "$$

التمرين الرابع: نفى وحقيقة عبارة

نعتبر العبارة التالية:

$$P: " (\forall x \in \mathbb{R}^*), x + \frac{1}{x} \geq 2 "$$

1. أعط نفي العبارة P

2. حدد قيمة حقيقة العبارة \bar{P} ثم استنتج قيمة

حقيقة العبارة P .

التمرين الخامس: صياغة عبارة رياضية

أكتب باستعمال المكممات والرموز المنطقية العبارات التالية:

♣ لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد عدد صحيح

$$\text{طبيعي } m \text{ بحيث } n + m = 0$$

♣ يوجد عدد حقيقي M حيث لكل x من \mathbb{R} لدينا

$$x \leq M$$

♣ لكل عددين حقيقيين x و y من \mathbb{R} لدينا

$$x^2 + y^2 \geq xy$$

♣ لكل عدد حقيقي a يوجد عدد حقيقي وحيد x من

$$\mathbb{R} \text{ بحيث } x^2 - ax = 1$$

♣ لا يوجد أي عدد جذري حل للمعادلة

$$x^2 - 2 = 0$$

♣ للحدودية $x^2 - 2x + 3$ على الأقل جذر حقيقي

♣ لكل عددين جذريين x و y يوجد عدد جذري z

$$\text{بحيث } x < z \text{ و } y < z$$

♣ المعادلة $x^2 + 1 = 0$ لا تقبل حلا حقيقيا

التمرين السادس: الاستلزامات المنطالية

1. بين أن:

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$$

2. حل في \mathbb{R}^2 المعادلة التالية:

$$2\sqrt{x-1} + 4\sqrt{y-4} = x + y$$

3. حل في \mathbb{R}^2 المعادلة التالية: $xy - x = y - 1$

التمرين السابع: التكافؤات المنطالية

1. بين أن: $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2 : a + b \geq 2ab$

2. ليكن $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow (x,y) = (2,8)$$

التمرين الثامن: المثال المضاد

1. بين أن العبارة $(\forall x \in \mathbb{R}^*) , x + \frac{1}{x} > 2$ خاطئة

2. بين أن العبارة $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + 4x + 4 > 0$

التمرين التاسع: الاستلزام المضاد للعكس

1. بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^5 + x < 2 \Rightarrow x < 1$

2. بين أن لكل x و y من \mathbb{R}

$$(x \neq 1) \wedge (y \neq 1) \Rightarrow x + y \neq xy + 1$$

3. بين أن لكل x و y و z من \mathbb{R} لدينا:

$$x + y > 2z \Rightarrow x > zz >$$

4. بين أن:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : x \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \neq 1 + \frac{x}{2}$$

5. بين أن:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -\frac{3}{4}x \Rightarrow \frac{x-y}{x+y} \neq 7$$

6. بين أن $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$$

7. بين أنه إذا كان n فإن n^2 حيث n عدد صحيح

طبيعي.

التمرين العاشر: البرهان بفصل الحالات

1. حل في \mathbb{R} المعادلات التالية:

$$|x| + |x+1| + |x+2| = 5$$

$$|x+1| + 2x = 0$$

2. حل في \mathbb{R} المترابحة التالية:

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x - 2$$

التمرين الحادي عشر: البرهان بالخلف

1. بين أن $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

2. بين أن $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

3. بين أن $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$

التمرين الثاني عشر: الاستلزامات المنطالية

1. ليكن x عددا حقيقيا، بين أن:

$$2 < x < 4 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{x-1} < 1$$

2. ليكن x من \mathbb{R}^+ ، بين أن:

$$\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0$$

3. ليكن x و y عددين حقيقيين موجبين بين أن:

$$(x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y}) \Rightarrow x = y = 1$$

التمرين الثالث عشر:

1. بين أن:

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\sqrt{x+8} + \sqrt{x+3} = 5 \Leftrightarrow x = 1)$$

2. نعتبر العبارة التالية:

$$Q : (\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) (x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2)$$

(a) حدد نفي العبارة Q

(b) أدرس صحة العبارة Q

التمرين الرابع عشر: الاستدلال بالترجع

1. بين أن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1 \times 2 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \left(\frac{1}{1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \leq 2 - \frac{1}{n}$$

التمرين الخامس عشر: الاستدلال بالترجع

بين أن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : 2^n \geq n$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{2}$$

$$(\forall n \geq 3) : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq n$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 3^n \geq 2n + 1$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : (1 + a)^n \geq 1 + na$$

التمرين السادس عشر: الاستدلال بالترجع

بين أن:

$$1. (\forall n \in \mathbb{N}) : 4^n - 1 \text{ تقبل القسمة على } 3$$

$$2. (\forall n \in \mathbb{N}^*) : 3^{2n} - 2^n \text{ تقبل القسمة على } 7$$

$$3. (\forall n \in \mathbb{N}^*) : 10^n - 1 \text{ تقبل القسمة على } 9$$

$$4. (\forall n \in \mathbb{N}) : 4^n + 6n - 1 \text{ تقبل القسمة على } 9$$

$$5. (\forall n \in \mathbb{N}) : 21^n - 2^{2n} \text{ تقبل القسمة على } 17$$

$$6. (\forall n \in \mathbb{N}) : n^5 - n \text{ يقسم } 5$$

$$7. (\forall n \in \mathbb{N}) : 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \text{ تقبل القسمة على } 17$$

$$8. (\forall n \in \mathbb{N}^*) : 3 + 2 \times 3^n + 3 \times 5^n \text{ تقبل القسمة على } 24$$

التمرين السابع عشر: الاستدلال بالخلف

$$1. \text{ بين أن } \sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$$

$$2. \text{ بين أن } (\forall n \in \mathbb{N}^*) : \sqrt{n^2 + n} \notin \mathbb{N}$$

$$3. \text{ بين أن } (\forall x \in \mathbb{R}^*) : \sqrt{1 + \frac{2x^2}{3}} \neq 1 + \frac{x^2}{3}$$

4. بين أن النظمة لا تقبل حل:

$$\begin{cases} 5x - 4z > 2 \\ 4y - 5x \geq 2 \\ y - z \leq 1 \end{cases}$$

5. بين ان المعادلة لا تقبل حل في \mathbb{Z}

$$-x^4 + 3x^2 + 7 = 0$$

$$6. \text{ بين أن: } (\forall n \in \mathbb{N}^*) : \sqrt{\frac{n}{n+2}} \notin \mathbb{Q}$$

التمرين الثامن عشر: الاستدلال المضاد للعكس

1. بين أن x^2 فردي يستلزم x فردي

$$2. \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| > \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 \neq 1$$

3. x و y عددين حقيقيين موجبين غير منعدمين

$$\text{بين أن: } \left| \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} \right| \neq 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \neq \sqrt{5}$$

التمرين التاسع عشر:

حل في \mathbb{R}^2 النظمتين التاليتين:

$$(S_1) : \begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ (x - 3y)(2x - y) = 0 \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} x + 2y = 5 \\ (x + y - 3)(2x + y - 1) = 0 \end{cases}$$

التمرين العشرون:

ضع جدول حقيقة ما يلي:

$$1. "(\bar{P}) \text{ et } Q"$$

$$2. "(P \text{ et } Q)"$$

$$3. "(\bar{P}) \text{ ou } (\bar{Q})"$$

$$4. "(\bar{P}) \text{ ou } Q"$$

التمرين الواحد والعشرون:

تعتبر العبارتين التاليتين:

$$Q(x) : "x \geq 2" \quad P(x) : "x \leq 1"$$

أعط قيم x التي من أجلها:

$$1. "P \wedge Q" \text{ صحيحة}$$

$$2. "P \wedge Q" \text{ خاطئة}$$

$$3. "P \vee Q" \text{ صحيحة}$$

$$4. "P \vee Q" \text{ خاطئة}$$

التمرين الثاني والعشرون:

f دالة معرفة على \mathbb{R} اكتب باستعمال المكلمات:

$$1. f \text{ تأخذ دائما القيمة } 1$$

$$2. f \text{ تأخذ على الأقل القيمة } 1$$

$$3. f \text{ تأخذ قيم محصورة بين } -2 \text{ و } 3$$

$$4. f \text{ تأخذ فقط قيم صحيحة طبيعية}$$

$$5. f \text{ تنعدم على الأقل مرة واحدة في المجال}$$

$$[-1, 1[$$

التمرين الثالث والعشرون:

أعط نفي كل عبارة مع تحديد ما إذا كانت هذه العبارة صحيحة أم خاطئة مع تعليل الجواب.

$$P_1 : "(\forall x \in \mathbb{R}) : x > 1 "$$

$$P_2 : "(\exists x \in \mathbb{R}) : x \leq 1 "$$

$$P_3 : "(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) : x + y > 0 "$$

$$P_4 : "(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) : x + y > 0 "$$

$$P_5 : "(\exists x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) : y^2 > x "$$

$$P_6 : "(\forall n \in \mathbb{N}) : n^2 + n + 1 \leq n^3 "$$

$$P_7 : "(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists n \in \mathbb{N}) : n \geq x "$$

$$P_8 : "(\exists n \in \mathbb{N}) (\forall p \in \mathbb{N}) : n > p \Rightarrow n + p > 2p "$$

التمرين الرابع والعشرون:

اتمم باستعمال أحد الرمزتين \forall أو \exists

$$\dots x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$\dots x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\dots x \in \mathbb{R}, 2x + 1 = 0$$

$$\dots x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 \geq 0$$

التمرين الخامس والعشرون:

اتمم باستعمال أحد الرمزتين \Rightarrow أو \Leftrightarrow

1. لكل عدد حقيقي x

$$(x-1)(x+2) = (x-1)(3x+5) \dots x+2 = 3x+5$$

2. لكل عدد حقيقي $x \neq 1$

$$\frac{x}{x-1} (1+2x^2) = 0 \dots x = 0$$

3. لكل عدد حقيقي $x \neq 2$

$$\frac{2x-3}{x-2} > 1 \dots 2x-3 > x-2$$

4. لكل عدد حقيقي $x > 2$

$$\frac{x+5}{x-2} > 1 \dots x+5 > x-2$$

التمرين الخامس والعشرون:

ليكن a و b عددين حقيقيين في المجال $]-1,1[$.

$$\text{بين أن } \frac{a+b}{1+ab} \in]-1,1[$$

للتواصل معنا:

Star.maths.physique@gmail.com

تابعونا على موقع التواصل الاجتماعي

Facebook

وذلك بالضغط على زر الإعجاب

J'aime

لصفحة "عالم الفيزياء والرياضيات"

نرحب بأفكاركم واقتراحاتكم ومساهماتكم لنشرها

على:

موقع النجاح في الفيزياء والرياضيات

الأستاذ: حاليب عزيز

مدينة جمعة اسحيم