Arithmétique dans IN

Exercice 1 :

Soient a *et* b *deux nombres réels positif tels que :* $a+b\leq 1$.

① - *Montre que :* $2\sqrt{ab}\leq a+b$?

② - *Déduire que :* $ab\leq \frac{1}{4}$.

Exercice 2 :

Soient a *et* b *deux nombres réels tels que :* $a^2+b^2\leq 4$.

Montrer que : $|a+b|\leq 2\sqrt{2}$

Exercice 3 :

① - *soit* n *un entier naturel .*

On pose : $A=7^p+7^{p+1}+7^{p+2}+7^{p+3}+7^{p+4}$.

Montrer que A est un mutiple de 2801 .

② - *Calculer la somme suivante:*

$$S=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{2016\times 2017}.$$

Exercice 4 :

① - *Soient* a *et* b *deux nombres réels tels que :* $\frac{25}{58}=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{8}}}$. *Déterminer a et b.*

② - *Montrer que :*

$$\frac{30}{6-\sqrt{6}}-\frac{6}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}+\frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{10\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}.$$

Exercice 5 :

① - *Soient* a *et* b *deux entiers naturels non nul .*

a - *Vérifier que :* $(a+1)(a+2)=a(a+3)+2$

b - *En déduire que* $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$ *et un carré parfait.*

② - *On pose :* $x=a+\frac{1}{a}$ *et* $y=b+\frac{1}{b}$ *et* $z=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

Montrer que : $x^2+y^2+z^2=xyz+4$.

Exercice 6 :

① - *Montrer que :* $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^8+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^8=47$

② - *Soient* x *et* y *et* z *et* t *des nombres réels tels que :* $x+y+z=t$ *et* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{t}$ *et* $x^3+y^3+z^3=10^9$.

a - *Montrer que :* $(x+y)(y+z)(z+x)=0$.

b - *On pose :* $x+y=0$.

Montrer que : $z=10^3$. *et Déduire la valeur de* $A=x+y+z+t$.

Exercice 7:

① - a - *Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres :* $a=1960$ *et* $b=9800$.

b - *Résoudre dans* $\mathbb{N}^2$ *l'équation :* $xy+x+y=30$.

② - a - *Montrer que :* $\sqrt{9+2\sqrt{3}}\prec 4$.

b - *Vérifier que :* $\sqrt{7-2\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

③ - *On pose :* $A=\sqrt{4-\sqrt{9+2\sqrt{3}}}-\sqrt{4+\sqrt{9+2\sqrt{3}}}$

simplifier A.

Exercice 8:

Soient x *et* y *deux nombres réels tels que :* $y\in\left[0,\frac{2}{3}\right]$ *et* $|2x-1|\leq\frac{1}{2}$. *On pose :* $a=\frac{4x+3y}{3(1-y)}$

① - *Montrer que :* $\frac{1}{4}\leq x\leq\frac{3}{4}$.

② - *Montrer que :* $\frac{1}{3}\leq a\leq 5$.

② - *Déterminer la valeur de nombre suivant :*

$A=|3a-4x+2|+|3a-4x-14|$.

□