

Exercices valeur absolue

Exercice 1 :

Résoudre dans \mathbb{R} , les inéquations suivantes :

a) $2 < |x + 1| < 3$

b) $\frac{1}{2} \leq |x - 3| < 4$

c) $\begin{cases} |x - 3| > 2 \\ |x + 4| \leq 3 \end{cases}$

Exercice 2 :

On souhaite résoudre dans \mathbb{R} l'équation $|x + 2| + |x - 5| = 11$ (1).

Partie 1 : Additionner deux valeurs absolues en utilisant la droite graduée des réels

1) On considère sur la droite numérique, les points A, B et M d'abscisses respectives -2, 5 et x.

Comment s'écrit alors l'équation (1) ?

2) a) Si $M \in [AB]$, montrer que $AM + BM$ est constant.

Qu'en déduit-on ?

b) Si M appartient à la demi-droite d'origine A et ne contenant pas B, montrer que (1) s'écrit :

$$2AM + AB = 11.$$

c) Si M appartient à la demi-droite d'origine B et ne contenant pas A, procéder de manière analogue à la question précédente et en déduire la solution correspondante.

3) Conclure.

Partie 2 : Additionner deux valeurs absolues en utilisant un tableau

4) Selon les valeurs de x compléter le tableau suivant :

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$
$ x + 2 $				
$ x - 5 $				
$ x + 2 + x - 5 $				

En déduire la résolution dans \mathbb{R} de $|x + 2| + |x - 5| = 11$

5) En utilisant la méthode du tableau résoudre les équations suivantes :

a) $2|x + 2| + |x - 5| = 9$

b) $|x + 2| - 2|x - 5| = 5$

Exercices valeurs absolue
CORRECTION

Exercice 1 :

a) On résout le système suivant :

$$\begin{cases} |x + 1| < 3 \\ |x + 1| > 2 \end{cases}$$

On détermine l'ensemble I des solutions de la première inéquation et l'ensemble J des solutions de la deuxième inéquation.

L'ensemble des solutions du système est alors $S = I \cap J$.

Résolution de $|x + 1| < 3$:

En termes de distance : Soit A le point d'abscisse -1 sur la droite graduée des réels et M le point d'abscisse x.

L'inéquation se traduit par $AM < 3$

Soit $-1 - 3 < x < -1 + 3$

Donc $I =]-4 ; 2[$.

Résolution de $|x + 1| > 2$:

L'inéquation se traduit par $AM > 2$

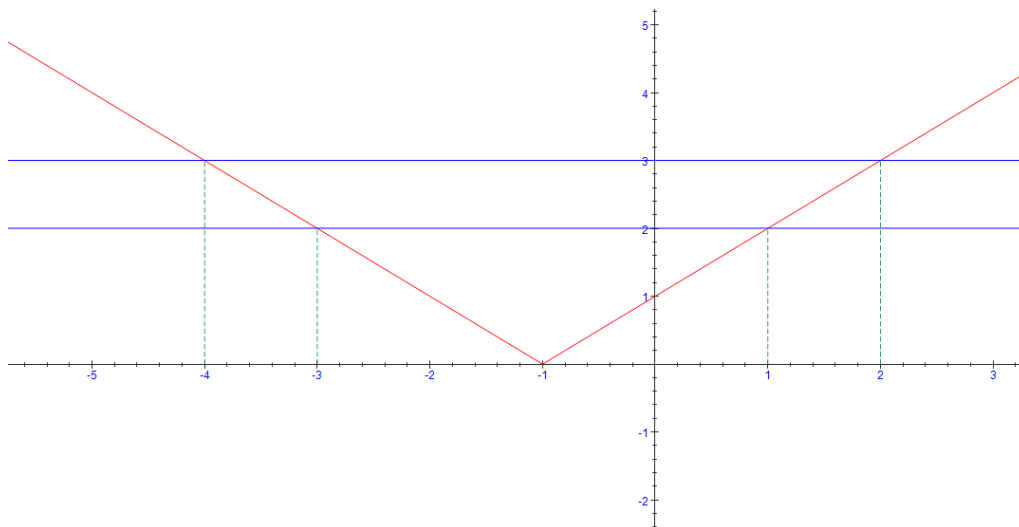
Soit $x < -1 - 2$ ou $x > -1 + 2$

Donc $J =]-\infty ; -3[\cup]1 ; +\infty[$.

$S = I \cap J =]-4 ; -3[\cup]1 ; 2[$

Conclusion : L'ensemble des solutions de la double inéquation $2 < |x + 1| < 3$ est $S =]-4 ; -3[\cup]1 ; 2[$

On peut résoudre graphiquement cette double inéquation à partir du tracé de la courbe représentant la fonction $f : x \rightarrow |x + 1|$ et des droites horizontales d'équation $y = 2$ et $y = 3$:



Exercices valeurs absolue
CORRECTION

b) On résout le système suivant :

$$\begin{cases} |x - 3| \geq \frac{1}{2} \\ |x - 3| < 4 \end{cases}$$

On détermine l'ensemble I des solutions de la première inéquation et l'ensemble J des solutions de la deuxième inéquation.

L'ensemble des solutions du système est alors $S = I \cap J$.

Résolution de $|x - 3| < 4$:

En termes de distance : Soit A le point d'abscisse 3 sur la droite graduée des réels et M le point d'abscisse x.

L'inéquation se traduit par $AM < 4$

Soit $3 - 4 < x < 3 + 4$

Donc $I =]-1 ; 7[$.

Résolution de $|x - 3| \geq \frac{1}{2}$:

L'inéquation se traduit par $AM \geq \frac{1}{2}$

Soit $x \leq 3 - \frac{1}{2}$ ou $x \geq 3 + \frac{1}{2}$

Donc $J =]-\infty ; \frac{5}{2}] \cup [\frac{7}{2} ; +\infty[$.

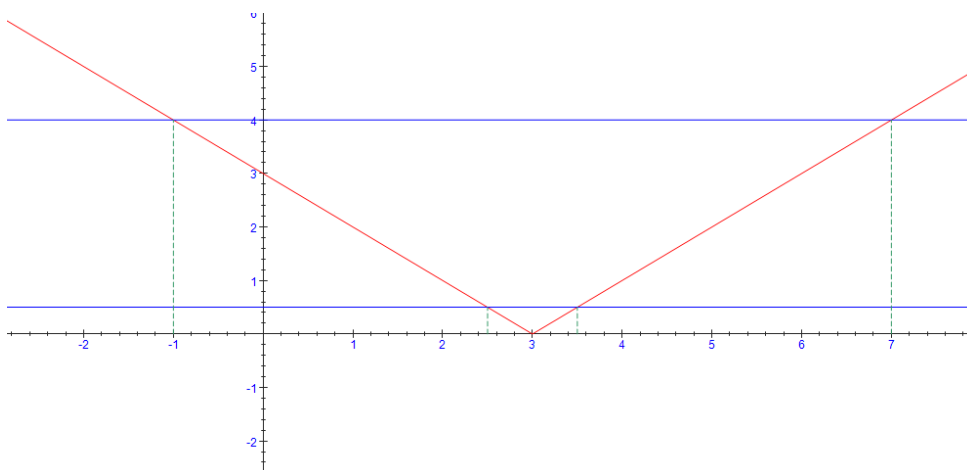
$S = I \cap J =]-1 ; \frac{5}{2}] \cup [\frac{7}{2} ; 7[$

Conclusion : L'ensemble des solutions de la double inéquation $\frac{1}{2} \leq |x - 3| < 4$

est $S =]-1 ; \frac{5}{2}] \cup [\frac{7}{2} ; 7[$

On peut résoudre graphiquement cette double inéquation à partir du tracé de la courbe représentant la fonction $f : x \rightarrow |x - 3|$ et des droites horizontales

d'équation $y = \frac{1}{2}$ et $y = 4$:



Exercices valeurs absolue
CORRECTION

$$c) \begin{cases} |x - 3| > 2 \\ |x + 4| \leq 3 \end{cases}$$

On détermine l'ensemble I des solutions de la première inéquation et l'ensemble J des solutions de la deuxième inéquation.

L'ensemble des solutions du système est alors $S = I \cap J$.

Résolution de $|x - 3| > 2$:

En termes de distance : Soit A le point d'abscisse 3 sur la droite graduée des réels et M le point d'abscisse x.

L'inéquation se traduit par $AM > 3$

Soit $x < 3 - 2$ ou $x > 3 + 2$

Donc $I =]-\infty ; 1[\cup]5 ; +\infty[$

Résolution de $|x + 4| \leq 3$:

Soit B le point d'abscisse -4.

L'inéquation se traduit par $BM \leq 3$.

Soit $-4 - 3 \leq x \leq -4 + 3$

Donc $J = [-7 ; -1]$

$S = I \cap J = J = [-7 ; -1]$

d) Conclusion : L'ensemble des solutions du système d'inéquations $\begin{cases} |x - 3| > 2 \\ |x + 4| \leq 3 \end{cases}$ est $S = [-7 ; -1]$.

Exercice 2 :

Partie 1 : Additionner deux valeurs absolues en utilisant la droite graduée des réels

1) L'équation s'écrit à l'aide de distances : $AM + BM = 11$.

2) a) Si $M \in [AB]$ alors $AM + BM = AB = 7$.

Or $7 \neq 11$ donc pas de solution correspondante pour l'équation (1).

b) Si M appartient à la demi-droite d'origine A et ne contenant pas B alors :

$MB = AM + AB$ et $AM + BM = 11 \rightarrow 2AM + AB = 11$.

Soit $2AM = 11 - 7$

Soit $AM = 2$

Soit $x = -2 - 2 = -4$

Attention, la solution $-2 + 2$ ne convient pas car $0 > -2$.

c) Si M appartient à la demi-droite d'origine B et ne contenant pas A alors :

$AM = AB + BM$ et $AM + BM = 11 \rightarrow 2BM + AB = 11$

Soit $2BM = 4$

Soit $BM = 2$

Soit $x = 5 + 2 = 7$

Exercices valeurs absolue

CORRECTION

Attention, la solution $5 - 2$ ne convient pas car $3 < 5$.

3) Les solutions de l'équation $|x + 2| + |x - 5| = 11$ sont donc -4 et 7 .

Partie 2 : Additionner deux valeurs absolues en utilisant un tableau

4)

x	- ∞	-2	5	+ ∞
$ x + 2 $	$-x - 2$	$x + 2$	$x + 2$	
$ x - 5 $	$-x + 5$	$-x + 5$	$x - 5$	
$ x + 2 + x - 5 $	$-2x + 3$	7	$2x - 3$	

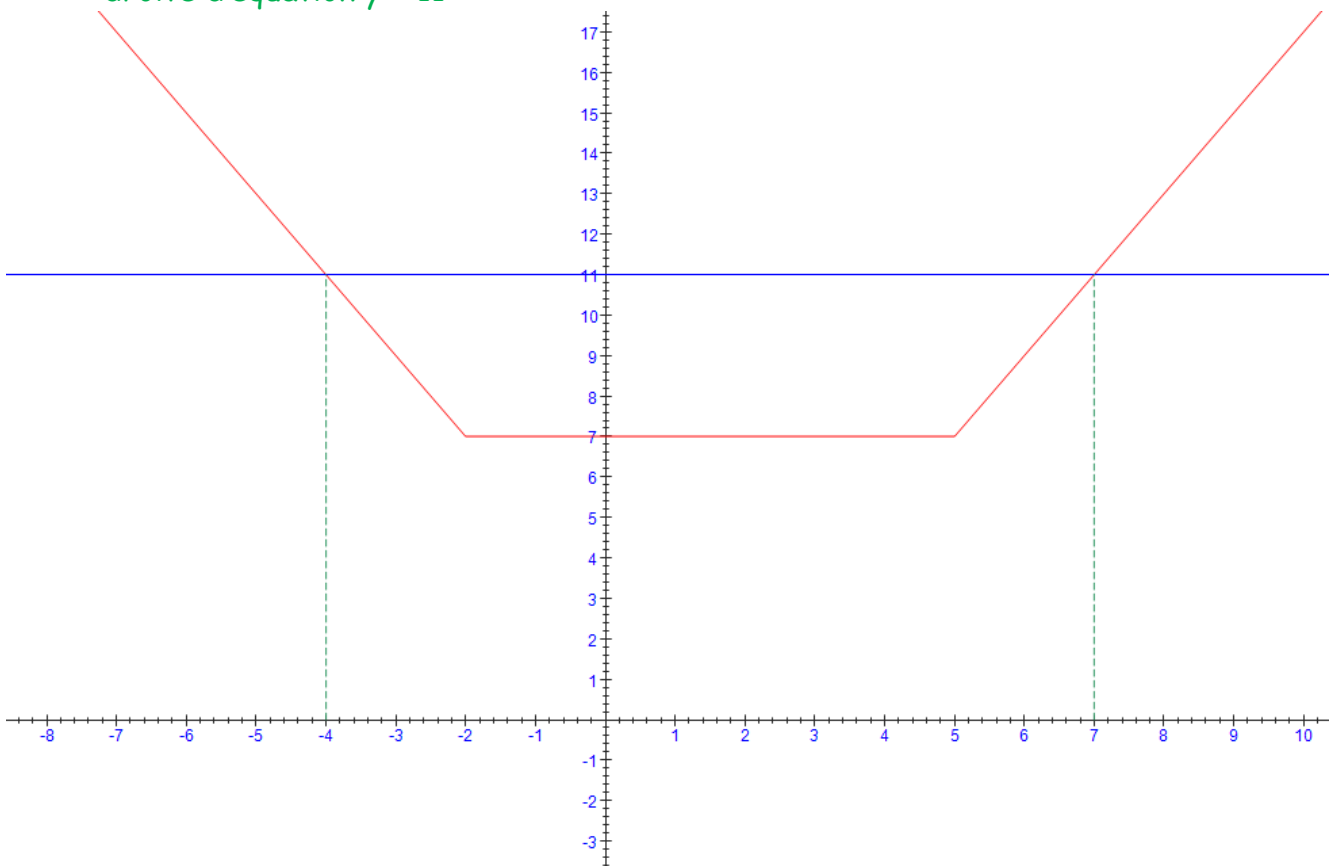
Du tableau, on déduit que :

$$|x + 2| + |x - 5| = 11 \quad \Leftrightarrow (-2x + 3 = 11 \text{ et } x \leq -2) \text{ ou } (2x - 3 = 11 \text{ et } x \geq 5)$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \text{ ou } x = 7$$

Donc l'ensemble des solutions est $S = \{-4 ; 7\}$.

Remarque : On peut résoudre cette équation graphiquement à partir des abscisses des points d'intersection des courbes d'équation $y = |x + 2| + |x - 5|$ et de la droite d'équation $y = 11$:



Exercices valeurs absolue
CORRECTION

5) a) $2|x + 2| + |x - 5| = 9$

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$
$2 x + 2 $	$-2x - 4$	$2x + 4$	$2x + 4$	
$ x - 5 $	$-x + 5$	$-x + 5$	$x - 5$	
$2 x + 2 + x - 5 $	$-3x + 1$	$x + 9$	$3x - 1$	

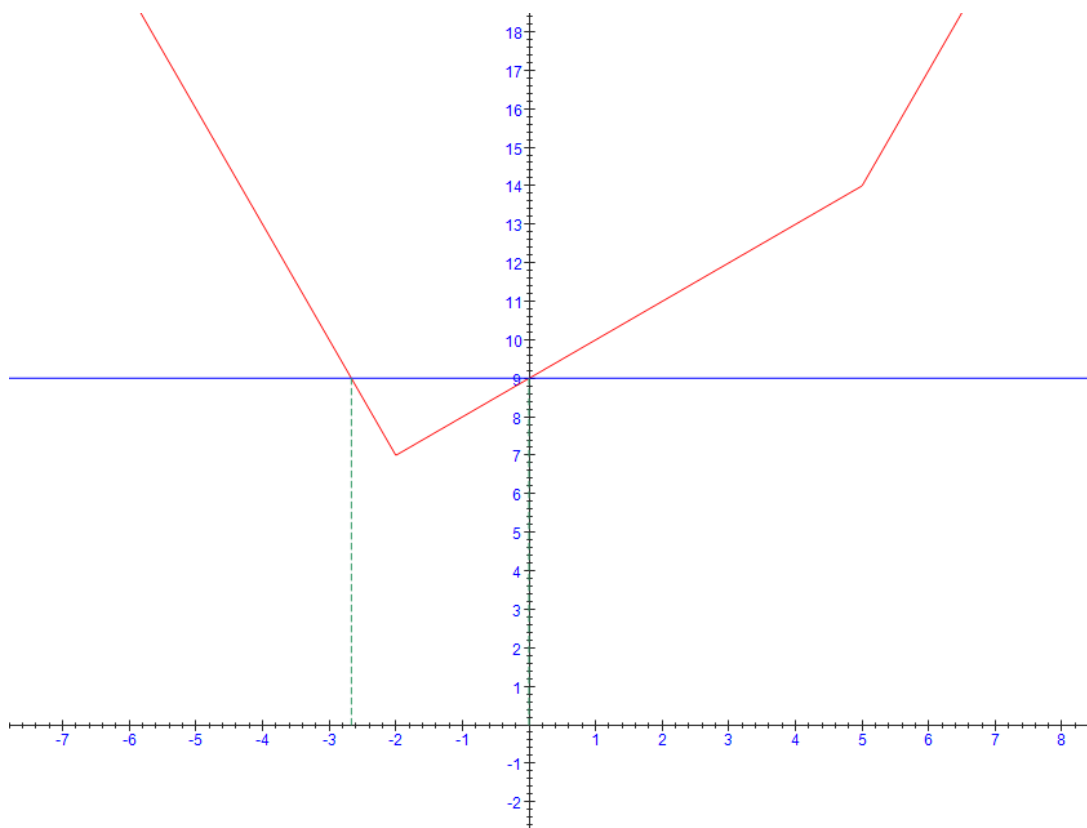
$$2|x + 2| + |x - 5| = 9$$

$$\Leftrightarrow (-3x + 1 = 9 \text{ et } x \leq -2) \text{ ou } (x + 9 = 9 \text{ et } -2 \leq x \leq 5) \text{ ou } (3x - 1 = 9 \text{ et } x \geq 5)$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{8}{3} \text{ ou } x = 0$$

$$\text{Donc } S = \left\{ -\frac{8}{3}; 0 \right\}$$

Remarque : On peut résoudre cette équation graphiquement à partir des abscisses des points d'intersection des courbes d'équation $2|x + 2| + |x - 5|$ et de la droite d'équation $y = 9$:



Exercices valeurs absolue
CORRECTION

b) $|x + 2| - 2|x - 5| = 5$

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$
$ x + 2 $		$-x - 2$	$x + 2$	$x + 2$
$-2 x - 5 $		$2x - 10$	$2x - 10$	$-2x + 10$
$ x + 2 - 2 x - 5 $		$x - 12$	$3x - 8$	$-x + 12$

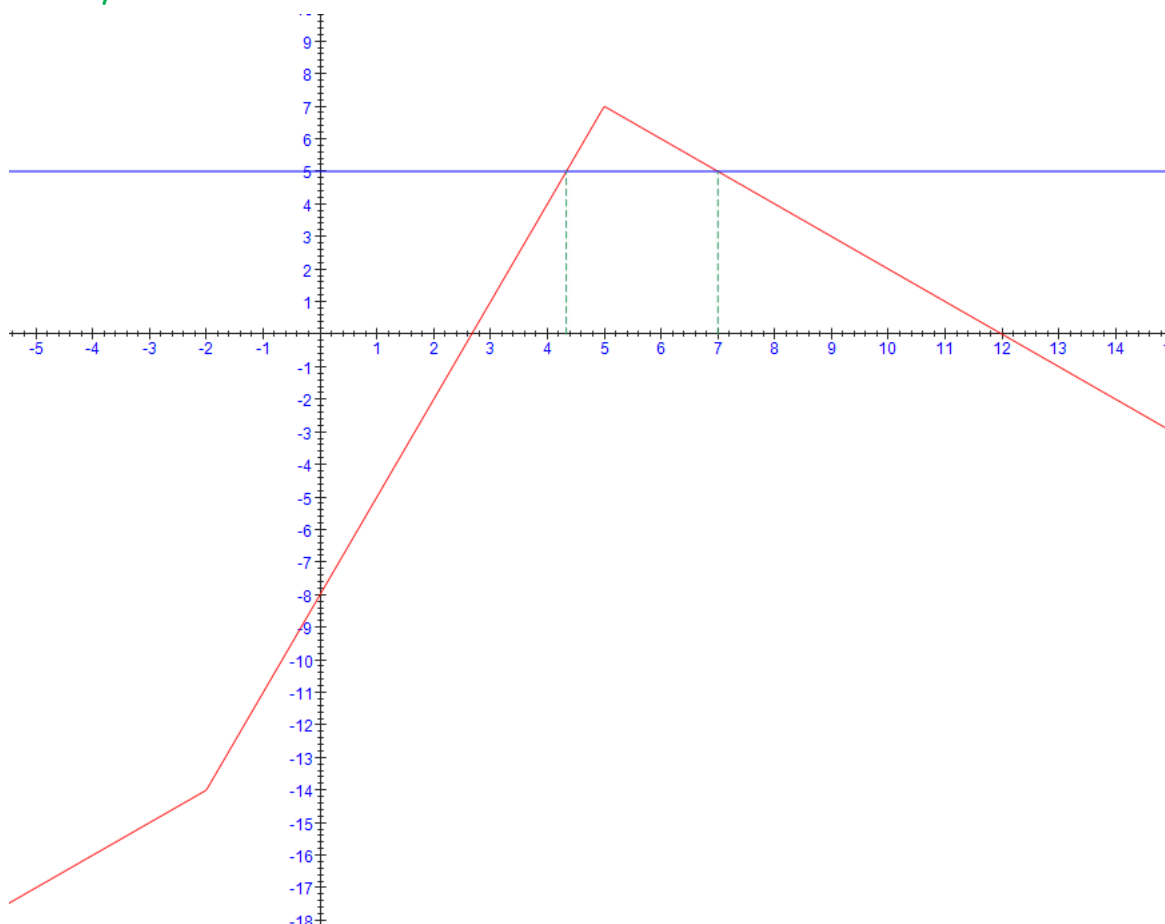
$$|x + 2| - 2|x - 5| = 5$$

$$\Leftrightarrow (x - 12 = 5 \text{ et } x \leq -2) \text{ ou } (3x - 8 = 5 \text{ et } -2 \leq x \leq 5) \text{ ou } (-x + 12 = 5 \text{ et } x \geq 5)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{13}{3} \text{ ou } x = 7$$

$$\text{Donc } S = \left\{ \frac{13}{3}, 7 \right\}$$

Remarque : On peut résoudre cette équation graphiquement à partir des abscisses des points d'intersection des courbes d'équation $|x + 2| - 2|x - 5|$ et de la droite d'équation $y = 5$:



Exercices valeurs absolue

CORRECTION

Remarque :

Les fonctions $x \mapsto |x + 2| + |x - 5|$ ou $x \mapsto 2|x + 2| + |x - 5|$ ou $x \mapsto |x + 2| - 2|x + 5|$ sont appelées des fonctions **affines par morceaux**.