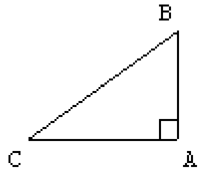
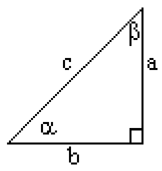
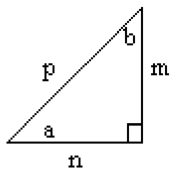
TRIGONOMETRIE - EXERCICES CORRIGES

Trigonométrie rectangle

Exercice n°1. Compléter les égalités en respectant bien les notations de l'énoncé

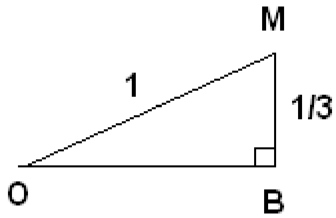
		
$\cos\widehat{ABC} =$ $\sin\widehat{ABC} =$ $\tan\widehat{ABC} =$ $\cos\widehat{ACB} =$ $\sin\widehat{ACB} =$ $\tan\widehat{ACB} =$	$\cos\alpha =$ $\sin\alpha =$ $\tan\alpha =$ $\cos\beta =$ $\sin\beta =$ $\tan\beta =$	$\cos a =$ $\sin a =$ $\tan a =$ $\cos b =$ $\sin b =$ $\tan b =$

Exercice n°2.

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB=3 et $\widehat{ABC} = 30°$. Calculer BC et AB

Exercice n°3.

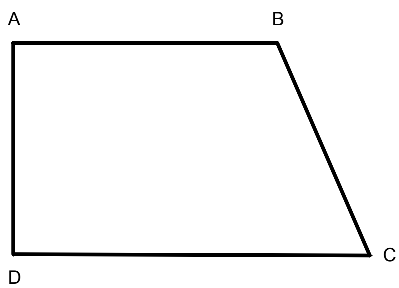
Les dimensions du triangle OBM sont données sur la figure :
Entourer parmi les données suivantes, celles qui sont correctes



$OB = \dfrac{2}{3}$ $\qquad \sin\widehat{BMO} = \dfrac{1}{3}$ $\qquad OB = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

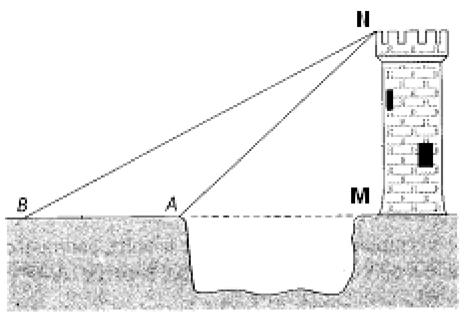
$\sin\widehat{BOM} = \dfrac{1}{3}$ $\qquad \cos\widehat{BOM} = \dfrac{2}{3}$ $\qquad \left(\sin\widehat{BOM}\right)^2 + \left(\cos\widehat{BOM}\right)^2 = 1$

Exercice n°4. Le trapèze rectangle ABCD ci-contre est tel que AB = 5 cm ,
AD = 4 cm et $\widehat{DCB} = 60°$
Déterminer les valeurs exactes du périmètre et de l'aire de ce trapèze.



Exercice n°5.

Une tour est protégée par un large fossé. En se situant en A, l'angle $\widehat{MAN}$ vaut 42°. En reculant de 10 mètres (AB = 10) et en se positionnant en B, l'angle $\widehat{MBN}$ vaut 27°. Les triangles AMN et BMN sont rectangles en M.
1) En exprimant MN en fonction de AM de deux façons différentes (utiliser le fait que BM=BA+AM), calculer la longueur AM
2) En déduire la hauteur de la tour (on donnera une valeur exacte, puis valeur approchée à un centimètre près.)



Le radian

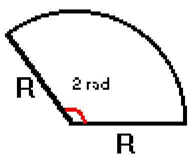
Exercice n°6.

Convertir en degrés : 1) $\dfrac{\pi}{3}$ rad 2) $\dfrac{\pi}{2}$ rad 3) $\dfrac{5\pi}{6}$ rad 4) $\dfrac{5\pi}{9}$ rad 5) $\dfrac{5\pi}{36}$ rad

Convertir en radians : 6) 45° 7) 120 ° 8) 30° 9) 40° 10) 125°

Exercice n°7.

Exprimer, en fonction de *R*, le périmètre de la figure :



Exercice n°8.

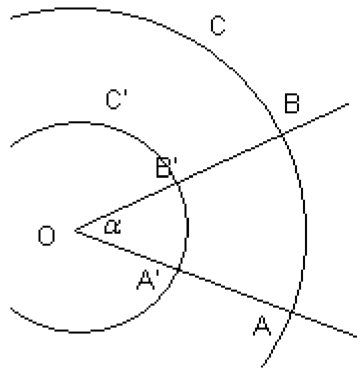
Soit C et C' deux cercles de centre O, de rayons respectifs R et R' (R'<R) et A et B deux points distincts de C.

Pour aller de A à B, deux trajets sont possibles :

Trajet 1 : de A à B sur le cercle C

Trajet 2 : de A à A', puis de A' à B' sur le cercle C', et enfin de B' à B.

(la figure est indicative, et ne correspond pas aux mesures suivantes)



1) On suppose que R=150, R'=50 et $\alpha = 1\ rad$.

Lequel de ces deux trajets est le plus court ?

2) On suppose que R=300, R'=250 et $\alpha = 3\ rad$.

Lequel de ces deux trajets est le plus court ?

3) Trouver une condition sur α pour que :

a) les deux trajets aient même longueur.

b) Le trajet 2 soit plus grand que le trajet 1.

Arcs et angles orientés

Exercice n°9.

Donner **une** mesure en **radians** de l'angle formé par la petite aiguille et la grande aiguille d'une montre (plusieurs réponses sont possibles)

1) à 3 h 2) à 1 h 3) à 4 h

4) à 6 h 5) à 8 h

Exercice n°10.

1) Placer, sur le cercle trigonométriques ci-dessous les points M tels que $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}\right)=\frac{27\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

2) Placer, sur le cercle trigonométriques ci-dessous les points N tels que $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{ON}\right)=-\frac{38\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

3) Placer, sur le cercle trigonométriques ci-dessous les points P $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OP}\right)=x$ avec $3x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Exercice n°11.

Soir (C) un cercle de centre A et B un point de (C)

1) Construire les points C,D,E et F du cercle (C) tels que :

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}$ $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{3\pi}{4}$ $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)=\frac{7\pi}{6}$ $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right)=-\frac{3\pi}{4}$

2) Déterminer une mesure puis la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right)$ $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}\right)$ $\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AC}\right)$ $\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AE}\right)$

Exercice n°12.

ACE est un triangle isocèle direct de sommet principal A et tel que AC=5 et $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right)=\frac{2\pi}{5}(2\pi)$

1) Tracez le triangle équilatéral direct AEF et le triangle ABC isocèle rectangle direct en A.

2) Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB}\right)$ $\left(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{BC}\right)$ $\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{CB}\right)$ $\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{EC}\right)$

Angles associés

Exercice n°13.

1) Sachant que $\begin{cases}\frac{\pi}{2}\leq x\leq\pi\\ \sin x=\frac{1}{3}\end{cases}$, et sans utiliser de calculatrice, donner une valeur **exacte** de $\cos x$ et de $\tan x$

2) Tout le monde sait bien que $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ (on ne cherchera pas à démontrer ce résultat !). Calculer $\sin\frac{\pi}{8}$

Exercice n°14.

Pour tout réel x , simplifier l'expression $A(x)=\cos(3\pi-x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin\left(-\frac{3\pi}{2}-x\right)$

Exercice n°15.

1) Déterminer la mesure de l'angle x vérifiant : $\begin{cases}\frac{\pi}{2}\leq x\leq\pi\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{cases}$

2) Sachant que $\cos\frac{\pi}{10}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ (on ne cherchera pas à démontrer ce résultat !), déterminer $\cos\frac{11\pi}{10}$

3) Déterminer une valeur **exacte** de x sachant que $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos x=-\frac{1}{2}$

4) Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près en radians de a sachant que $\cos a=-0,25$ et $a\in[-\pi;0]$

Calcul algébriques à l'aide d'expressions trigonométriques

Exercice n°16.

1) Simplifier au maximum, pour tout réel t, l'expression $(1-\cos t)(1+\cos t)$

2) Démontrez que pour tout nombre réel x , : $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos^2 x-\sin^2 x$ puis que $\cos^4 x-\sin^4 x=2\cos^2 x-1$

Exercice n°17.

1) Démontrer que pour tout réel x, $\cos(2x)=2\cos^2(x)-1$

2) Puisque vous connaissez $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, déterminez une valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ puis de $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$

Equations et inéquations trigonométriques

Exercice n°18.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes : $\cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin(3x)=\frac{1}{2}$

$\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ $\cos(2x)=\sin(3x)$ $\cos(x)\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin(3x)>\frac{1}{2}$

Exercice n°19.

1) Exprimer $\cos a\cos b$ en fonction de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$

2) En effectuant un changement de variable que l'on précisera, démontrez que pour tous nombres réels p et q, on a :
$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

3) En déduire les solutions de l'équation $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$

Exercice n°20.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-4x^3+3x-\frac{1}{2}$

1) Faire une étude complète de la fonction f (limites, sens de variation, etc…), dressez son tableau de variations, et tracez sa courbe représentative C dans un repère orthonormal (unité de longueur 4 cm)

2) Trouvez les solutions dans $[0;2\pi]$ de l'équation, d'inconnue a $\sin 3a=\frac{1}{2}$. Représentez sur un cercle trigonométrique les points associés à ces solutions

3) Montrez que pour tout nombre réel a, $\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a$

4) Déduisez de la question 2) les solutions de l'équation $f(x)=0$. Donnez-en des valeurs approchées à 0,1 près

Fonctions trigonométriques

Exercice n°21.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin 2x$

On note (C) la représentation graphique de f dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1) Calculer $f(0);f(\frac{\pi}{6});f(\frac{\pi}{12});f(\frac{\pi}{2});f(\frac{\pi}{8});f(\pi)$
2) Montrer que f est impaire. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative (C) ?
3) Soit x un nombre réel. Comparer $f(x+\pi)$ et $f(x)$. Que peut-on en déduire pour f ?
4) Démontrez que la fonction f est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ puis strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$
5) Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right]$

Trigonométrie et limites

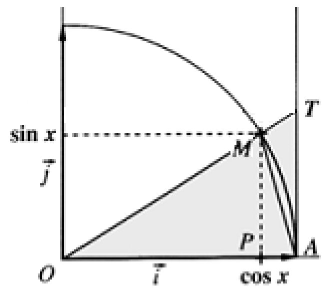
Exercice n°22.

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = 2x - \sin x$

1) Montrer que pour tout x réel $2x-1 \leq f(x) \leq 2x+1$
2) En déduire les limites de f lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$

Exercice n°23.

Déterminer, à l'aide des théorèmes de comparaison, les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de chacune des fonctions f suivantes (si elles existent): 1) $f(x) = \dfrac{1+\cos x}{\sqrt{x}}$ 2) $f(x) = \dfrac{x\sin x}{x^2+1}$;



Exercice n°24.

Soit x un réel de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère les points : A(1;0), M(cos x;sin x), P(cos x;0). On considère de plus le point T intersection de (OM) et de la perpendiculaire à (OA) en A

1) Montrer que AT = tan x
2) Soit A_1 l'aire du triangle OAM, A_2 l'aire du secteur de disque OAM et A_3 l'aire du triangle OAT.
En comparant ces aires, prouver que : $\sin x \leq x \leq \tan x$.
3) En déduire que $\cos x \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq 1$.
4) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\sin x}{x}$.

Exercice n°25.

En utilisant le résultat $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (cf exercice précédent), étudiez les limites en 0 des fonctions :

1) $x \to \dfrac{\sin 5x}{2x}$ 2) $x \to \dfrac{x}{\sin 3x}$ 3) $x \to \dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}$ 4) $x \to \dfrac{\tan x}{x}$

Calculs de dérivées

Exercice n°26.

Dans chacun des cas suivants, calculer la fonction dérivée de la fonction f en précisant le domaine de définition et le domaine de dérivabilité.

1) $f(x) = x\cos x - 2\sin x$	2) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$	3) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	4) $f(x) = \cos(3x) - \sin(2x)$

Exercice n°27.

En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

Exercice n°28. Dérivée $n^{\text{ième}}$

Calculer les dérivées d'ordre 1 à n , $n\in\mathbb{N}$, de f sur l'intervalle I, avec $f(x)=\cos 3x$ et $I=\mathbb{R}$

Trigonométrie et intégration

Exercice n°29.

Déterminer une primitive de f sur un intervalle contenu dans son ensemble de définition

1) $f(x)=\sin x-2\cos x$ 2) $f(x)=\sin x\cos x$ 3) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ 4) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

5) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}$ 6) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ sur I= $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ 7) $f(x)=\tan x$ sur $\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$

Exercice n°30. Vrai ou Faux ?

1) $\int_0^{\pi}\sin x\cos x dx=0$

2) $\int_1^{e}\dfrac{(\ln x)^2}{x}dx=\dfrac{1}{3}$.

3) $\int_0^{-\pi}\sin^4 x dx=\int_0^{\pi}\sin^4 x dx$.

Exercice n°31.

Etablir que $\int_0^1 x^2\sin x dx\le\int_0^1 x\sin x dx$

Exercice n°32.

1) Calculez l'intégrale $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$ en utilisant la formule d'intégration par parties:

Calculez l'intégrale I en utilisant deux fois le théorème de l'intégration par parties:

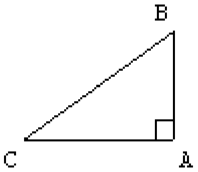
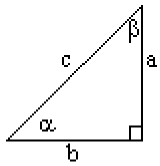
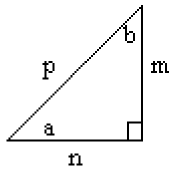
2) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x dx$ 3) $I=\int_0^{\pi} e^x\sin x dx$ 4) $I=\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x dx$

TRIGONOMETRIE - CORRECTION

Trigonométrie rectangle

Exercice n°1

Dans un triangle rectangle, $\sin x = \dfrac{\text{coté opposé}}{\text{hypothénuse}}$, $\cos x = \dfrac{\text{coté adjacent}}{\text{hypothénuse}}$ et $\tan x = \dfrac{\text{coté opposé}}{\text{coté adjacent}}$. Ainsi

		
$\cos \widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC}$ $\sin \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{BC}$ $\tan \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{AB}$ $\cos \widehat{ACB} = \dfrac{AC}{BC}$ $\sin \widehat{ACB} = \dfrac{AB}{BC}$ $\tan \widehat{ACB} = \dfrac{AB}{AC}$	$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$ $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$ $\tan\alpha = \dfrac{a}{b}$ $\cos\beta = \dfrac{a}{c}$ $\sin\beta = \dfrac{b}{c}$ $\tan\beta = \dfrac{b}{a}$	$\cos a = \dfrac{n}{p}$ $\sin a = \dfrac{m}{p}$ $\tan a = \dfrac{m}{n}$ $\cos b = \dfrac{m}{p}$ $\sin b = \dfrac{n}{p}$ $\tan b = \dfrac{n}{m}$

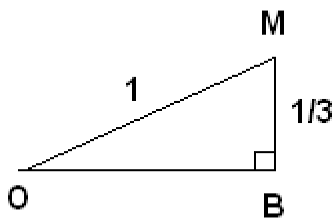
Exercice n°2

Dans le triangle ABC, rectangle en A, on peut écrire $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC}$, d'où :

$BC = \dfrac{AB}{\cos\widehat{ABC}} = \dfrac{3}{\cos 30°} = \dfrac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$. De plus $\sin\widehat{ABC} = \dfrac{AC}{BC}$ d'où $AC = BC\sin 30° = 2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2} = \sqrt{3}$

Exercice n°3

Les affirmations vraies sont :



$OB = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. En effet, on calcule la longueur OB dans le triangle rectangle grâce au théorème de Pythagore : $OB^2 = 1^2 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{9}$ donc $OB = \sqrt{\dfrac{8}{9}} = \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}} = \boxed{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$

$\sin\widehat{BOM} = \dfrac{BM}{OM} = \dfrac{1}{3}$

$\left(\sin\widehat{BOM}\right)^2 + \left(\cos\widehat{BOM}\right)^2 = 1$ (ceci est **toujours vrai** quel que sot l'angle)

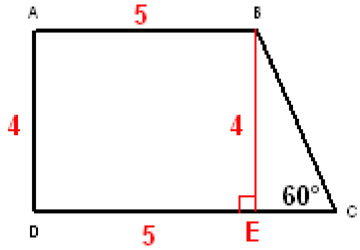
Les autres affirmations sont fausses. En effet $OB = \dfrac{2}{3}$ est faux puisque $OB = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ (voir ci-dessus)

$\cos\widehat{BOM} = \dfrac{2}{3}$ est faux car $\cos\widehat{BOM} = \dfrac{OB}{OM} = \dfrac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{1} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin\widehat{BMO} = \dfrac{1}{3}$ est faux car $\sin\widehat{BMO} = \dfrac{OB}{OM} = \dfrac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{1} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Exercice n°4

Notons E le projeté orthogonal de B sur [CD] Dans le triangle BEC, rectangle en E, on a :



$\frac{BE}{EC}=\tan\left(\widehat{BCE}\right)=\tan(60°)$ donc $\boxed{EC=\frac{4}{\tan(60°)}=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}}$

De plus, $\frac{BE}{BC}=\sin\left(\widehat{BCE}\right)=\sin(60°)$ donc $\boxed{BC=\frac{4}{\sin(60°)}=\frac{4}{\sqrt{3}/2}=\frac{8}{\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}}$

On en déduit que le périmètre du trapèze est égal à 5+4+5+EC+BC, soit $14+\frac{4}{\tan(60°)}+\frac{4}{\sin(60°)}\boxed{=\frac{42+12\sqrt{3}}{3}}$

L'aire du trapèze vaut $\frac{\overbrace{5+\frac{4}{\tan(60°)}}^{\text{Grande base}}+\overbrace{5}^{\text{Petite base}}}{2}\times\underbrace{4}_{\text{hauteur}}=20+\frac{8}{\tan(60°)}=20+\frac{8}{\sqrt{3}}=20+\frac{8\sqrt{3}}{3}\boxed{=\frac{60+8\sqrt{3}}{3}}$

Exercice n°5

1) Dans le triangle AMN, rectangle en M, on écrit $\frac{MN}{AM}=\tan(42°)\Leftrightarrow MN=AM\tan(42°)$

Dans le triangle MMN, rectangle en M, on écrit $\frac{MN}{BM}=\tan(27°)\Leftrightarrow MN=BM\tan(27°)$

En utilisant le fait que BM=BA+AM, on écrit :

$MN=BM\tan(27°)=(10+AM)\tan(27°)=10\tan(27°)+AM\tan(27°)$

Si par ailleurs $MN=AM\tan(42°)$, on aura donc $AM\tan(42°)=10\tan(27°)+AM\tan(27°)$, c'est-à-dire

$AM\left(\tan(42°)-\tan(27°)\right)=10\tan(27°)$ donc $\boxed{AM=\frac{10\tan(27°)}{\tan(42°)-\tan(27°)}}$

2) On conclut donc que $MN=AM\tan(42°)=\boxed{\frac{10\tan(27°)\tan(42°)}{\tan(42°)-\tan(27°)}}$

La calculatrice fournit $MN\approx 11,74\,m$

Le radian

Exercice n°6

On applique la formule $\text{mesure en degré}=\frac{\text{mesure en radian}\times 180}{\pi}$

1) $\frac{\pi}{3}rad\leftrightarrow 60°$	2) $\frac{\pi}{2}rad\leftrightarrow 90°$	3) $\frac{5\pi}{6}rad\leftrightarrow 150°$	4) $\frac{5\pi}{9}rad\leftrightarrow 100°$	5) $\frac{5\pi}{36}rad\leftrightarrow 25°$

On applique la formule $\text{mesure en radians}=\frac{\text{mesure en degrés}\times\pi}{180}$

6) $45°\leftrightarrow\frac{\pi}{4}rad$	7) $120°\leftrightarrow\frac{2\pi}{3}rad$	8) $30°\leftrightarrow\frac{\pi}{6}rad$	9) $40°\leftrightarrow\frac{2\pi}{9}rad$	10) $125°\leftrightarrow\frac{25\pi}{36}rad$

Exercice n°7

Un angle au centre de α rad intercepte, sur un cercle de rayon R, un arc de mesure égale à $L=R\times\alpha$

L'arc de cercle intercepté mesure donc $2R$ unités de longueur. Le périmètre de la figure vaut donc $2R+R+R=4R$ unités de longueur

Exercice n°8

Un angle au centre de α rad intercepte, sur un cercle de rayon R, un arc de mesure égale à $L=R\times\alpha$

1) Dans le premier cas (R=150, R'=50 et $\alpha=1\,rad$), le trajet 1 a pour longueur $T_1=150\times 1=150$ unités de longueur, tandis que le trajet 2 a pour longueur $T_2=AA'+50\times 1+BB'=250$ unités de longeur donc $\boxed{T_1<T_2}$

2) Dans le deuxième cas (R=300, R'=250 et $\alpha = 3\ rad$), le trajet 1 a pour longueur $T_1 = 300 \times 3 = 900$ unités de longeur, tandis que le trajet 2 a pour longueur $T_2 = AA' + 250 \times 3 + BB' = 850$ unités de longeur donc $\boxed{T_2 < T_1}$

3) Les deux trajets seront de la même longueur si et seulement si :

$$\alpha R = AA' + \alpha R' + BB' \Leftrightarrow \alpha R = (R - R') + \alpha R' + (R - R')$$

$$\Leftrightarrow \alpha(R - R') = 2(R - R') \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 2}$$

(On remarque que cela ne dépend ni de R ni de R')

Le trajet 2 sera plus grand que le trajet 1 si et seulement si

$$\alpha R < AA' + \alpha R' + BB' \Leftrightarrow \alpha R < (R - R') + \alpha R' + (R - R')$$

$$\Leftrightarrow \alpha(R - R') < 2(R - R') \Leftrightarrow \boxed{\alpha < 2}$$

Arcs et angles orientés

Exercice n°9

				
à 3 h, une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{2}$	à 1 h, une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{6}$	à 4 h, une mesure de l'angle est $\frac{2\pi}{3}$	à 6 h, une mesure de l'angle est π	à 8 h, une mesure de l'angle est $\frac{2\pi}{3}$

Exercice n°10

(figure en fin d'exercice)

1) Puisque $\frac{27\pi}{6} = \frac{(24+3)\pi}{6} = \frac{24\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} = 4\pi + \frac{\pi}{2} = 2 \times \underbrace{2\pi}_{\text{un tour dans le sens trigo}} + \frac{\pi}{2}$, on peut écrire que

$$\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right) = 2 \times 2\pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} = \frac{\pi}{2} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$$

2) Puisque $-\frac{38\pi}{3} = -\frac{(36+2)\pi}{3} = -12\pi - \frac{2\pi}{3} = 6 \times \underbrace{(-2\pi)}_{\text{un tour dans le sens trigo inverse}} - \frac{2\pi}{3}$, on peut écrire $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}\right) = 6 \times (-2\pi) - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$= -\frac{2\pi}{3} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$$

3) Attention à la division par 3 :

Si $3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ alors $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

Pour $k = 0$, on obtient $x_0 = -\frac{\pi}{6}$ (point P_0)

Pour $k = 1$ on obtient $x_1 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ (point P_1)

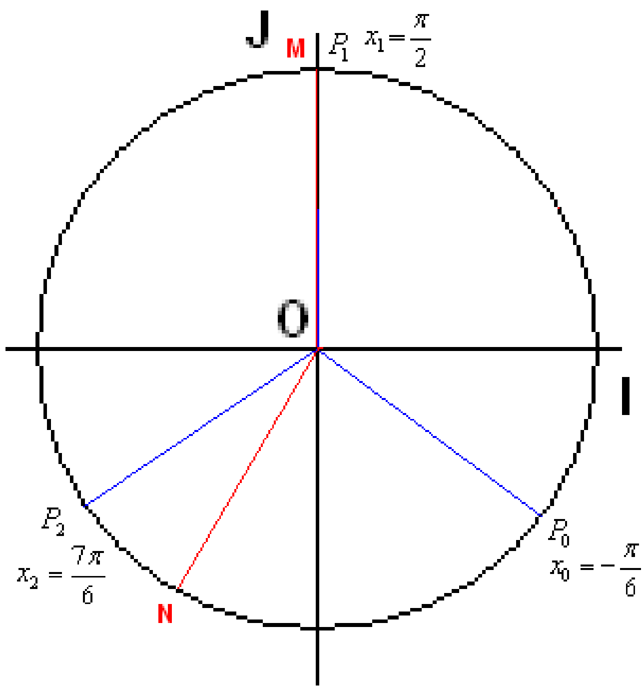
Pour $k = 2$ on obtient $x_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{2 \times 2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$ (point P_2)

Pour $k = 3$on obtient $x_3 = -\frac{\pi}{6} + \frac{3 \times 2\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi$.

On retombe sur le point P_0

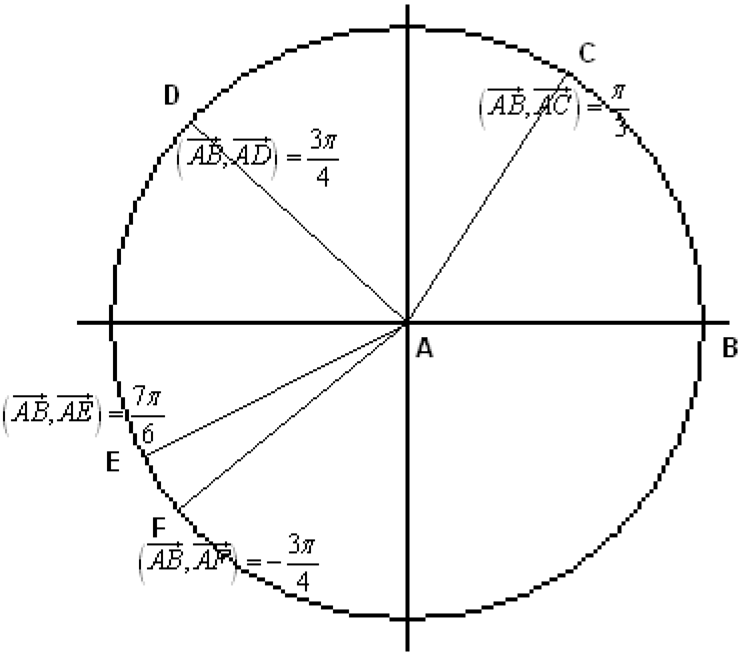
De même, pour $k = -1$ on obtient $x_{-1} = -\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6}$.

On retombe sur le point P_2



Exercice n°11

1) (Au départ, le point B peut être choisi n'importe où sur le cercle)



2) Par application de la relation de Chasles sur les angles orientés de vecteurs :

$$\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right)=\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)(2\pi)$$
$$=-\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)(2\pi)$$
$$=-\frac{\pi}{3}+\frac{7\pi}{6}(2\pi)$$
$$\boxed{=\frac{5\pi}{6}(2\pi)}$$

$$\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}\right)=\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right)(2\pi)$$
$$=-\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right)(2\pi)$$
$$=-\frac{3\pi}{4}+\left(-\frac{3\pi}{4}\right)(2\pi)$$
$$=-\frac{3\pi}{2}(2\pi)\boxed{=\frac{\pi}{2}(2\pi)}$$

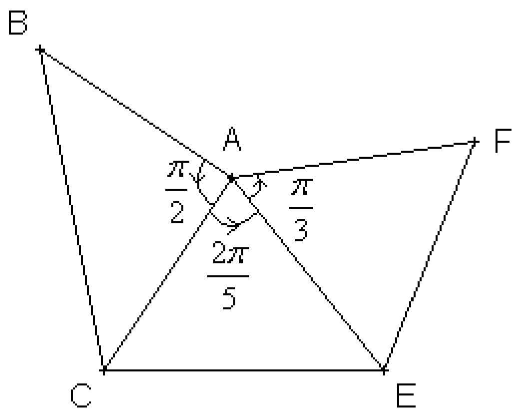
$$\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)(2\pi)$$
$$=-\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right)+\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)(2\pi)$$
$$=-\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{3}(2\pi)$$
$$=\frac{13\pi}{12}(2\pi)\boxed{=-\frac{11\pi}{12}(2\pi)}$$

$$\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AE}\right)=\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)(2\pi)$$
$$=-\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right)+\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)(2\pi)$$
$$=-\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+\frac{7\pi}{6}(2\pi)$$
$$=\frac{23\pi}{12}(2\pi)\boxed{=-\frac{\pi}{12}(2\pi)}$$

Exercice n°12

1) Si le triangle AEF est triangle équilatéral direct, alors AE=AF et $\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}\right)=\frac{\pi}{3}$

Si le triangle ABC est isocèle rectangle direct en A, alors AB=AC et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$



2) Par application de la relation de Chasles sur les angles orientés de vecteurs, et de la propriété $\left(-\vec{u},\vec{v}\right)=\left(\vec{u},-\vec{v}\right)=\left(\vec{u},\vec{v}\right)-\pi(2\pi)$, on détermine :

$$\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AE}\right)+\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)(2\pi)$$
$$=-\frac{\pi}{3}+\left(-\frac{2\pi}{5}\right)+\left(-\frac{\pi}{2}\right)(2\pi)$$
$$=-\frac{37\pi}{30}(2\pi)\boxed{=\frac{23\pi}{30}(2\pi)}$$

$$\left(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EA}\right)+\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC}\right)+\left(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{BC}\right)(2\pi)$$
$$=\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{10}+\left(-\overrightarrow{CE},-\overrightarrow{CB}\right)(2\pi)$$
$$=\frac{19\pi}{30}+\left(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CB}\right)(2\pi)=\frac{19\pi}{30}+\frac{3\pi}{10}+\frac{\pi}{4}(2\pi)$$
$$=\frac{28\pi}{30}+\frac{\pi}{4}(2\pi)=\frac{71\pi}{60}(2\pi)\boxed{=-\frac{49\pi}{60}(2\pi)}$$

$$\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AE}\right)+\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)(2\pi)$$
$$=-\frac{\pi}{3}+\left(-\frac{2\pi}{5}\right)+\left(-\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)(2\pi)$$
$$=-\frac{11\pi}{15}+\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)-\pi(2\pi)$$
$$=-\frac{11\pi}{15}+\frac{\pi}{4}-\pi(2\pi)=-\frac{89\pi}{60}(2\pi)\boxed{=\frac{31\pi}{60}(2\pi)}$$

$$\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{EC}\right)=\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AE}\right)+\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{EC}\right)(2\pi)$$
$$=\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AE}\right)+\left(-\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC}\right)(2\pi)$$
$$=-\frac{\pi}{3}+\left(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EC}\right)-\pi(2\pi)$$
$$=-\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{10}-\pi(2\pi)=-\frac{31\pi}{30}(2\pi)\boxed{=\frac{29\pi}{30}(2\pi)}$$

Angles associés

Exercice n°13

1) En appliquant la formule $(\sin x)^2+(\cos x)^2=1$, on peut écrire $(\cos x)^2=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$, donc $\cos x=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ou $\cos x=-\sqrt{\frac{8}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Mais puisque $\frac{\pi}{2}\leq x\leq\pi$, $\cos x\leq 0$ donc $\boxed{\cos x=-\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

Par suite, $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\dfrac{1}{\cancel{3}}\times\left(-\dfrac{\cancel{3}}{2\sqrt{2}}\right)=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\boxed{=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}}$

2) En appliquant la formule $(\sin x)^2+(\cos x)^2=1$, on peut écrire $\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2=1-\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2=1-\frac{2+\sqrt{2}}{4}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

On devrait donc écrire $\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$ ou $\sin\frac{\pi}{8}=-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$

MAIS puisque $0\leq\frac{\pi}{8}\leq\pi$, $\sin\frac{\pi}{8}\geq 0$, de sorte que $\boxed{\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}}$

Exercice n°14

Pour tout réel x,

$$\cos(3\pi-x)=\cos(2\pi+\pi-x)=\underbrace{\cos(\pi-x)=-\cos x}_{\text{formule connue}},$$

$$\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)}_{\text{car }\cos(u)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}=\sin(-x)=-\sin x$$

Enfin, $\underbrace{\sin\left(-\frac{3\pi}{2}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{3\pi}{2}-x\right)\right)}_{\text{car }\sin(u)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}=\cos(2\pi+x)=\cos x$

Ainsi

$$A(x)=\cos(3\pi-x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin\left(-\frac{3\pi}{2}-x\right)$$
$$=-\cos x-\sin x+\cos x$$
$$\boxed{=-\sin x}$$

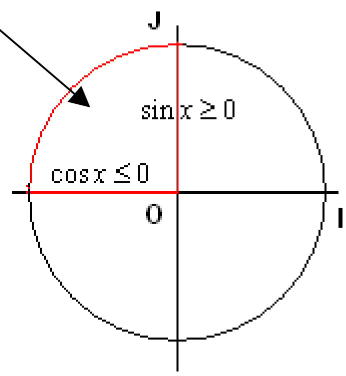
Exercice n°15

1) Puisqu'on a l'équivalence $\sin a = \sin b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ a = \pi - b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ et puisque $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, on peut donc écrire que :

$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$. Mais l'énoncé impose $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$, on en déduit donc $\boxed{x = \frac{5\pi}{6}}$

2) Puisque $\frac{11\pi}{10} = \pi + \frac{\pi}{10}$, on peut écrire $\cos\frac{11\pi}{10} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{10}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \boxed{= -\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$

3) Puisque $\sin x \geq 0$ et $\cos x \leq 0$, une mesure de l'angle se trouve dans le « quart Nord-Ouest », c'est-à-dire $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$



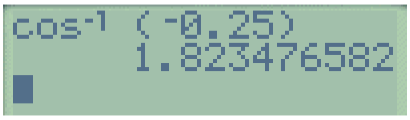
Puisqu'on a l'équivalence $\sin a = \sin b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ a = \pi - b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

et puisque $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on peut donc écrire que :

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Mais puisque l'énoncé impose $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$, on en déduit donc $\boxed{x = \frac{2\pi}{3}}$

4) La calculatrice a ici nous aider :



MAIS ATTENTION !

Puisque l'énoncé impose $a \in [-\pi; 0]$, il faut retenir celui des deux angles que la calculatrice ne nous donne pas, à savoir $\boxed{a \approx -1{,}82\,rad}$ à 10^{-2} près

Calcul algébriques à l'aide d'expressions trigonométriques

Exercice n°16

1) On développe : Pour tout réel *t*, $(1 - \cos t)(1 + \cos t) = 1^2 - (\cos t)^2 = \boxed{(\sin t)^2}$

2) Pour tout nombre réel x, : $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x)^2 - (\sin^2 x)^2 = (\cos^2 x - \sin^2 x)\left(\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{1}\right) = \boxed{\cos^2 x - \sin^2 x}$

Puisque $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$, on poursuit :

$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = \boxed{2\cos^2 x - 1}$

Exercice n°17

1) Pour tout réel *x*, $\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

Dans l'exercice précédent, on a établit que $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = \boxed{2\cos^2 x - 1}$

D'où l'égalité demandée

2) En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, et en appliquant la formule $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$, il vient :

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}$

Exercice n°18

Les équations trigonométriques, qui possèdent en général une infinité de solutions (sauf si on restreint l'intervalle de définition), se résolvent presque exclusivement en utilisant les équivalences suivantes :

$$\cos a=\cos b \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ a=-b+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases} \quad \text{et} \quad \sin a=\sin b \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ a=\pi-b+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases},$$

ainsi qu'à partir de certaines formules de trigonométrie

$\cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$	Puisque $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, on a donc $\cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(x)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou } x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases}$
$\sin(3x)=\frac{1}{2}$	Puisque $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$, on a donc $\sin(3x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(3x)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x=\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou } 3x=\pi-\left(\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou } x=\frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\end{cases}$ **Ne surtout pas oublier de diviser également** $2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ **par 3 !**
$\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$	$\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+\frac{\pi}{4}=x+\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou } 3x+\frac{\pi}{4}=-\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou } 4x=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=\frac{\pi}{12}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou } 4x=-\frac{7\pi}{12}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{24}+k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou } x=-\frac{7\pi}{48}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\end{cases}$
$\cos(2x)=\sin(3x)$	En utilisant la propriété $\cos\left(\frac{\pi}{2}-X\right)=\sin X$, l'équation devient équivalente à $\cos(2x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=\frac{\pi}{2}-3x+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ 2x=-\frac{\pi}{2}+3x+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ -x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}, k\in\mathbb{Z} \\ x=\frac{\pi}{2}-2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}, k\in\mathbb{Z} \\ x=\frac{\pi}{2}+2k'\pi, k'\in\mathbb{Z} \text{ (avec } k'=-k)\end{cases}$
$\cos(x)\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$	L'équation $\cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(x)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ayant pour solutions $\begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou } x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases}$, On en déduit que l'inéquation $\cos(x)\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$ a pour solutions : $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{4}+2k\pi;\frac{\pi}{4}+2k\pi\right]$

$\sin(3x)>\frac{1}{2}$	L'équation $\sin(3x)=\frac{1}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ayant pour solutions : $\begin{cases}3x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\\ \text{ou } 3x=\pi-\left(\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\\ \text{ou } x=\frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\end{cases}$,**(Ne surtout pas oublier de diviser également $2k\pi,k\in\mathbb{Z}$ par 3 !)**, on en déduit que l'inéquation $\sin(3x)>\frac{1}{2}$ a pour solutions : $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3};\frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}\right[$

Exercice n°19

1) Puisque $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ et $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$, en additionnant les deux lignes, on obtient $\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos(a)\cos(b)$, c'est-à-dire $\boxed{\cos(a)\cos(b)=\frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}}$

2) Si on pose $p=a+b$ et $q=a-b$, on aura, par demi-somme et demi-différence, $a=\frac{p+q}{2}$ et $b=\frac{p-q}{2}$, de sorte qu'en remplaçant dans l'écriture $\cos(a)\cos(b)=\frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$, on obtiendra $\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}=\frac{\cos p+\cos q}{2}$, c'est-à-dire l'égalité souhaitée $\boxed{\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}$

3) En appliquant la formule $\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ aux deux termes extrêmes du membre de gauche de l'équation, on obtient $\cos x+\cos 3x=2\cos\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2}=2\cos(2x)\cos(-x)=2\cos(2x)\cos(x)$

L'équation $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$ devient alors équivalente à

$$\cos(2x)+2\cos(2x)\cos(x)=0\Leftrightarrow\cos(2x)\left[1+2\cos(x)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\cos(2x)=0\quad\text{ou}\quad 1+2\cos(x)=0$$

La première équation $\cos(2x)=0$ est équivalente à $2x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\boxed{x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}}$

La deuxième équation $\cos(x)=-\frac{1}{2}$ est équivalente à $\boxed{x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}}$

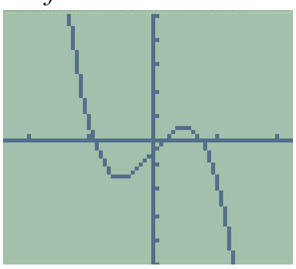
Trigonométrie et fonctions

Exercice n°20

1) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=-12x^2+3=3\left(1-4x^2\right)=3(1-2x)(1+2x)$

On en déduit le signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$-1/2$		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	$-1{,}5$	↗	$0{,}5$	↘	$-\infty$



(pour les limites : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}-4x^3=-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}-4x^3=+\infty$

2) L'équation $\sin 3a = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ est équivalente à $\begin{cases} 3a = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 3a = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi, l \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ a = \frac{5\pi}{18} + \frac{2l\pi}{3}, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Les solutions appartenant à l'intervalle $[0;2\pi]$ sont obtenues pour $k = 0,1,2$ et $l = 0,1,2$. Leurs valeurs rangées dans l'ordre croissant sont $\left\{\frac{\pi}{18}; \frac{5\pi}{18}; \frac{13\pi}{18}; \frac{17\pi}{18}; \frac{25\pi}{18}; \frac{29\pi}{18};\right\}$

3) Pour tout nombre réel *a*, $\sin 3a = \sin(a + 2a) = \sin(a)\cos(2a) + \sin(2a)\cos(a)$

Puisque par ailleurs $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$ et puisque $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$, on obtient :

$\sin 3a = \sin(a)\left(1 - 2\sin^2 a\right) + 2\sin(a)\cos(a)\cos(a) =$

$= \sin(a) - 2\sin^3 a + 2\sin(a)(\cos a)^2 = \sin(a) - 2\sin^3 a + 2\sin(a)\left(1 - \sin^2 a\right)$

$= \sin(a) - 2\sin^3 a + 2\sin(a) - 2\sin^3 a \boxed{= -4\sin^3 a + 3\sin(a)}$

4) L'équation $f(x) = 0$ s'écrivant $-4x^3 + 3x - \frac{1}{2} = 0$, on pose $x = \sin(a)$, et l'équation devient $-4(\sin a)^3 + 3\sin a = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire, compte tenu de la question 3), $\sin 3a = \frac{1}{2}$

Or la question 2) nous fournit les valeurs de *a* solutions : $a \in \left\{\frac{\pi}{18}; \frac{5\pi}{18}; \frac{13\pi}{18}; \frac{17\pi}{18}; \frac{25\pi}{18}; \frac{29\pi}{18};\right\}$

Puisque $x = \sin(a)$, il reste à « extraire » les trois valeurs différentes de sinus. En effet, les réels $\frac{\pi}{18}$ et $\frac{17\pi}{18}$ ont même sinus, puisque $\frac{17\pi}{18} = \pi - \frac{\pi}{18}$, et puisque pour tout α, $\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha)$. De même, les réels $\frac{5\pi}{18}$ et $\frac{13\pi}{18}$ ont même sinus, ainsi que les réels $\frac{25\pi}{18}$ et $\frac{29\pi}{18}$. Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont donc $x \in \left\{\sin\left(\frac{\pi}{18}\right); \sin\left(\frac{5\pi}{18}\right); \sin\left(\frac{25\pi}{18}\right)\right\}$

La calculatrice fournit $x \approx 0,17$, $x \approx 0,77$ et $x \approx -0,94$ à 0,01 près

Fonctions trigonométriques

Exercice n°21

1) On calcule $f(0) = \sin(2\times 0) = \sin(0) = 0$, $f(\frac{\pi}{6}) = \sin(2\times\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f(\frac{\pi}{12}) = \sin(2\times\frac{\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

$f(\frac{\pi}{2}) = \sin(2\times\frac{\pi}{2}) = \sin(\pi) = -1$, $f(\frac{\pi}{8}) = \sin(2\times\frac{\pi}{8}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(\pi) = \sin(2\times\pi) = \sin(2\pi) = 0$

2) $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \sin(2(-x)) = \underbrace{\sin(-2x) = -\sin(2x)}_{\text{car la fonction sinus est impaire}} = -f(x)$, ce qui prouve que *f* est impaire. Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'origine O du repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

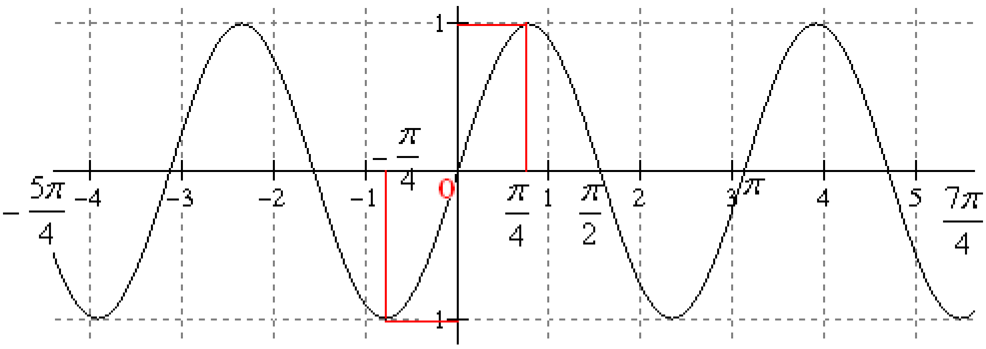
3) Pour tout *x* réel, on calcule $f(x+\pi) = \sin(2(x+\pi)) = \underbrace{\sin(2x+2\pi) = \sin(2x)}_{\text{car la fonction sinus est périodique de période } 2\pi} = f(x)$. *f* est donc périodique de période π. Il suffit de l'étudier sur un intervalle d'amplitude π, par exemple $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$

4) Pour tout nombres réels *a* et *b* de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ avec $-\frac{\pi}{4} \le a < b \le \frac{\pi}{4}$, on a $-\frac{\pi}{2} \le 2a < 2b \le \frac{\pi}{2}$, et puisque

la fonction sinus est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, on aboutira à $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\leq\sin(2a)<\sin(2b)\leq\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$, c'est-à-dire à $-1\leq f(a)<f(b)\leq 1$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

Pour tout nombres réels a et b de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ avec $\frac{\pi}{4}\leq a<b\leq\frac{3\pi}{4}$, on a $\frac{\pi}{2}\leq 2a<2b\leq\frac{3\pi}{2}$, et puisque la fonction sinus est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, on aboutira à $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\geq\sin(2a)>\sin(2b)\geq\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, c'est-à-dire à $1\geq f(a)>f(b)\geq -1$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$.

5) Représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right]$:



Exercice n°22

1) Pour tout x réel $-1\leq\sin x\leq 1\Leftrightarrow x-1\leq x+\sin x\leq x+1\Leftrightarrow x-1\leq f(x)\leq x+1$

2) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$, on conclut, en utilisant le théorème de minoration, que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1=-\infty$, on conclut, en utilisant le théorème de minoration, que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Exercice n°23

1) Puisque pour tout réel x, on a $-1\leq\cos x\leq 1$, alors pour tout x>0, on a $1-1\leq 1+\cos x\leq 1+1\Leftrightarrow 0\leq 1+\cos x\leq 2$, et par division par $\sqrt{x}$ qui est >0, on déduit que $\frac{0}{\sqrt{x}}\leq\frac{1+\cos x}{\sqrt{x}}\leq\frac{2}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow 0\leq\frac{1+\cos x}{\sqrt{x}}\leq\frac{2}{\sqrt{x}}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$, en application du théorème d'encadrement « des gendarmes », on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

2) Commençons par la limite lorsque $x\to+\infty$. On peut donc supposer que x>0.

Puisque pour tout réel x, on a $-1\leq\sin x\leq 1$, alors pour tout x>0, on a $\frac{-x}{x^2+1}\leq\frac{x\sin x}{x^2+1}\leq\frac{x}{x^2+1}$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=0$, et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, en application du théorème d'encadrement dit « des gendarmes », on conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

La limite lorsque $x\to-\infty$ se traite à l'identique : on peut donc supposer que x<0.

Puisque pour tout réel x, on a $-1\leq\sin x\leq 1$, alors pour tout x<0, on a $\frac{x}{x^2+1}\leq\frac{x\sin x}{x^2+1}\leq\frac{-x}{x^2+1}$ (l'inégalité est en sens inverse de la prcédente)

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=0$, et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, en application du théorème d'encadrement dit « des gendarmes », on conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

Exercice n°24

1) On a clairement $A_1 < A_2 < A_3$. On calcule : $A_1 = \frac{OA \times PM}{2} = \frac{1 \times \sin x}{2}$, puis par proportionnalité de l'aire et de la mesure du secteur angulaire, $A_2 = \frac{x}{2}$ (car un angle de 2π rad correspond à une aire de $\pi r^2 = \pi\, cm^2$, donc un angle de x rad correspond à une aire de $x \times \frac{\pi}{2\pi} = \frac{x}{2}$). Enfin $A_3 = \frac{OA \times AT}{2} = \frac{1 \times \tan x}{2} = \frac{\tan x}{2}$

Puisque $A_1 < A_2 < A_3$ alors $\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$.

En multipliant les trois membres de l'inégalité par 2, on obtient le résultat attendu.

2) En utilisant les deux premiers termes de l'inégalité, on a $\sin x < x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} < 1$ (car x>0)

En utilisant les deux derniers termes de l'inégalité, on a $x < \tan x \Leftrightarrow x < \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x}$ (car x>0)

3) Puisque pour tout x>0 , cos x < $\frac{\sin x}{x}$ < 1, et puisque $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$, on en conclut en application du théorème d'encadrement dit « des gendarmes », que $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\sin x}{x} = 1$

4) si x<0, la configuration des triangles et des secteurs angulaires reste la même, mais les mesures de l'aire (qui doivent être positives !) sont alors égales à $A_1 = -\frac{\sin x}{2}$, $A_2 = -\frac{x}{2}$ et $A_3 = -\frac{\tan x}{2}$

On a donc, pour x<0, $-\frac{\sin x}{2} < -\frac{x}{2} < -\frac{\tan x}{2} \Leftrightarrow -\sin x < -x < -\tan x$.

En utilisant les deux premiers termes de l'inégalité, on a $-\sin x < -x \Leftrightarrow \frac{-\sin x}{-x} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} < 1$ (car -x>0)

En utilisant les deux derniers termes de l'inégalité :

on a $-x < -\tan x \Leftrightarrow -x < \frac{-\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{-\sin x}{-x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x}$ (car -x>0). La conclusion de l'exercice reste la même

Exercice n°25

1) On écrit, pour tout x>0 , $\frac{\sin 5x}{2x} = \frac{\sin 5x}{\cancel{5x}} \frac{\cancel{5x}}{2x} == \frac{5}{2} \times \frac{\sin 5x}{5x}$. En posant $u = 5x$, on a $\lim_{x \to 0} u = 0$, et puisque $\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$, on en déduit donc que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$, donc par produit $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{2x} = \frac{5}{2}$

2) On écrit, pour tout x>0 , $\frac{x}{\sin 3x} = \frac{1}{3} \frac{3x}{\sin 3x}$. Puisque $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, on a aussi $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, donc en particulier $\lim_{x \to 0} \frac{3x}{\sin 3x} = 1$ (quitte à poser $u = 3x$), d'où, par produit, $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin 3x} = \frac{1}{3}$

3) On écrit, pour tout x>0 , $\frac{\sin 5x}{\sin 4x} = \frac{\sin 5x}{5x} \times \frac{4x}{\sin 4x} \times \frac{5x}{4x} = \frac{5}{4} \times \frac{\sin 5x}{5x} \times \frac{4x}{\sin 4x}$. Encore une fois, puisque $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$ et $\lim_{x \to 0} \frac{4x}{\sin 4x} = 1$, on conclut, par produit, que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x} = \frac{5}{4}$

4) On écrit, pour tout x>0 , $\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x \cos x} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x}$. Puisque $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et puisque $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$ donc $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$, on conclut que $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \times 1 = 1$

Exercice n°26

1) $f(x)=x\cos x-2\sin x$. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et produits de fonctions qui le sont.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=\underbrace{1\times\cos x+x\times(-\sin x)}_{\text{dérivée d'un produit}}-2\times\cos x=\cos x-x\sin x-2\cos x$ donc $\boxed{f'(x)=-\cos x-x\sin x}$

2) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$. f est définie et dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

Pour tout $x\in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ $f'(x)=\underbrace{\dfrac{(\cos x)\times x-(\sin x)\times 1}{x^2}}_{\text{dérivée d'un quotient}}=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ donc $\boxed{f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}}$

3) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$

Pour tout $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$,

$$\boxed{f'(x)=\underbrace{\frac{(\cos x)\times(\cos x)-(\sin x)\times(-\sin x)}{(\cos x)^2}}_{\text{dérivée d'un quotient}}=\frac{(\cos x)^2+(\sin x)^2}{(\cos x)^2}=\begin{cases}\dfrac{1}{(\cos x)^2}\\ 1+\dfrac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2}=1+(\tan x)^2\end{cases}}$$

4) $f(x)=\cos(3x)-\sin(2x)$. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et produits de fonctions qui le sont.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=3\times(-\sin(3x))-2\times(\cos(2x))=-3\sin(3x)-2\cos(2x)$ donc $\boxed{f'(x)=-3\sin(3x)-2\cos(2x)}$

Exercice n°27

Sur $I=\mathbb{R}$, on calcule $f'(x)=-3\sin 3x$, puis $f^{(2)}(x)=-3^2\cos 3x$, puis $f^{(3)}(x)=3^3\sin 3x$ et enfin $f^{(4)}(x)=3^4\cos 3x$, ce qui nous permet de conclure, de manière « cyclique » que :

Si $n=4m$, $f^{(n)}(x)=3^n\cos 3x$ Si $n=4m+1$, $f^{(n)}(x)=-3^n\sin 3x$

Si $n=4m+2$, $f^{(n)}(x)=-3^n\cos 3x$ Si $n=4m+3$, $f^{(n)}(x)=3^n\sin 3x$

Exercice n°28

1) Si on pose $f(x)=\sin x$, définie sur $\mathbb{R}$, puisque $f(0)=\sin 0=0$, la limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ se réécrit $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Or f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\cos x$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=\cos 0=1$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

2) Si on pose $f(x)=\cos x$, définie sur $\mathbb{R}$, puisque $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, la limite $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ se réécrit $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$. Or f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=-\sin x$ donc

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1.$$ Ainsi $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=-1$.

Exercice n°29

1) La fonction f définie par $f(x)=\sin x-2\cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc il existe une primitive définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{F(x)=-\cos x-2\sin x}$

2) $f(x)=\sin x\cos x$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x\sin x$, donc de la forme $f(x)=u'(x)u(x)$, où $u(x)=\sin x\Rightarrow u'(x)=\cos x$. Ainsi une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $\boxed{F(x)=\frac{(u(x))^2}{2}=\frac{(\sin x)^2}{2}}$

3) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ f est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour x appartenant à l'un des intervalles $\left]k\pi;(k+1)\pi\right[$, f étant de la forme $f(x)=\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$, où $u(x)=\sin x\Rightarrow u'(x)=\cos x$, elle admet une primitive sur chaque intervalle $\left]k\pi;(k+1)\pi\right[$ définie par $\boxed{F(x)=-\frac{1}{u(x)}=-\frac{1}{\sin x}}$

4) $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ f est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour x appartenant à l'un des intervalles $\left]k\frac{\pi}{2};(k+1)\frac{\pi}{2}\right[$, f étant de la forme $f(x)=\frac{-u'(x)}{(u(x))^2}$, où $u(x)=\cos x\Rightarrow u'(x)=\sin x$, elle admet une primitive sur chaque intervalle $\left]k\frac{\pi}{2};(k+1)\frac{\pi}{2}\right[$ définie par $\boxed{F(x)=\frac{1}{u(x)}=\frac{1}{\cos x}}$

5) $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}$ f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour $x\in\mathbb{R}$, f étant de la forme $f(x)=\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, où $u(x)=2+\sin x\Rightarrow u'(x)=\cos x$, elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$ définie par $\boxed{F(x)=2\sqrt{u(x)}=2\sqrt{2+\sin x}}$

6)) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$. f est définie et continue sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, et pour tout $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, puisque $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x)=\sin x\Rightarrow u'(x)=\cos x$, $\boxed{F(x)=\ln(|u(x)|)=\ln(|\sin x|)=\ln(\sin x)}$, puisque $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow\sin x>0$.

7) $f(x)=\tan x$. f définie est continue sur $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$, et pour tout $x\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$, puisque $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{-u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x)=\cos x\Rightarrow u'(x)=-\sin x$, $\boxed{F(x)=-\ln(|u(x)|)=-\ln(|\cos x|)=-\ln(-\cos x)}$, puisque $x\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]\Rightarrow\cos x<0$.

Exercice n°30

1) On calcule $\int_0^{\pi} \sin x \cos x dx = \int_0^{\pi} \cos x \sin x dx = = \int_0^{\pi} u'(x) u(x) dx$ où $u(x) = \sin x$. Ainsi $\int_0^{\pi} \sin x \cos x dx = \left[\frac{u^2(x)}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\left((\sin \pi)^2 - (\sin 0)^2\right) = \frac{1}{2}(0-0) = 0$. $\boxed{\text{L'affirmation est donc \textbf{VRAIE}}}$

2) On calcule $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \times (\ln x)^2 dx = \int_1^e u'(x) \times u^2(x) dx$ où $u(x) = \ln x$. $\boxed{\text{L'affirmation est donc \textbf{VRAIE}}}$

Ainsi $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \left[\frac{(u(x))^3}{3}\right]_1^e = \left[\frac{(\ln(x))^3}{3}\right]_1^e = \frac{(\ln(e))^3}{3} - \frac{(\ln(1))^3}{3} = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$.

3) On peut déjà écrire que $\int_0^{-\pi} \sin^4 x dx = -\int_{-\pi}^0 \sin^4 x dx$. Comme la fonction $x \to \sin^4 x$ est PAIRE sur $[-\pi;\pi]$, (puisque $(\sin(-x))^4 = (-\sin(x))^4 = (\sin(x))^4$), on a donc $\int_{-\pi}^0 \sin^4 x dx = \int_0^{\pi} \sin^4 x dx$. $\boxed{\text{L'égalité est donc \textbf{FAUSSE}}}$

Exercice n°31

Pour tout $x \in [0,1]$, $\sin x \geq 0$ et $x^2 \leq x$, donc $x^2 \sin x \leq x \sin x$

On « passe aux intégrales » dans l'inégalité. Ainsi $\int_0^1 x^2 \sin x dx \leq \int_0^1 x \sin x dx$

Exercice n°32 1) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x) v'(x) dx$ où $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$ et $v'(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties **(IPP en abrégé)**

$$I = [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x)dx = [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times (-\cos x) dx = 0 + 0 + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{1}$$

2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x) v'(x) dx$ où $u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'**IPP**,

$$I = [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x)dx = [x^2 \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \times (-\cos x) dx = 0 - 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos x dx$$

On calcule l'intégrale $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos x dx$ en effectuant une 2ème **IPP** : $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x) v'(x) dx$ où $u(x) = 2x \Rightarrow u'(x) = 2$ et $v'(x) = \cos x \Rightarrow v(x) = \sin x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d' **IPP**,

$J = [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x)dx = [2x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \times \cos x dx = \pi - 0 - 2[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2$. Finalement, $\boxed{I = \pi - 2}$

3) $I = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx = \int_0^{\pi} u(x) v'(x) dx$ où $u(x) = e^x \Rightarrow u'(x) = e^x$ et $v'(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d' **IPP**, $I = [u(x)v(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'(x)v(x)dx = [-e^x \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \times (-\cos x) dx$

$=e^{\pi}+1+\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$. On calcule $J=\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$ en effectuant une 2ème **IPP** : $J=\int_0^{\pi} e^x \cos x dx=\int_0^{\pi} u(x)v'(x)dx$ où $u(x)=e^x \Rightarrow u'(x)=e^x$ et $v'(x)=\cos x \Rightarrow v(x)=\sin x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d' **IPP**,

$J=\left[u(x)v(x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} u'(x)v(x)dx=\left[e^x \sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} e^x \sin x dx=0-0-I$

On aboutit donc à l'équation $I=e^{\pi}+1-I$ c'est-à-dire $2I=e^{\pi}+1$ et on conclut ainsi que $\boxed{I=\frac{e^{\pi}+1}{2}}$

4) $I=\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x dx=\int_0^{\pi} u(x)v'(x)dx$ où $u(x)=e^{2x} \Rightarrow u'(x)=2e^{2x}$ et $v'(x)=\cos x \Rightarrow v(x)=\sin x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d' **IPP**, $I=\left[u(x)v(x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} u'(x)v(x)dx=\left[e^{2x}\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} 2e^{2x}\sin x dx$

$=0-0-\int_0^{\pi} 2e^{2x}\sin x dx$. On calcule $J=\int_0^{\pi} 2e^{2x}\sin x dx$ en effectuant une 2ème **IPP** : $J=\int_0^{\pi} 2e^{2x}\sin x dx=\int_0^{\pi} u(x)v'(x)dx$ où $u(x)=2e^{2x} \Rightarrow u'(x)=4e^{2x}$ et $v'(x)=\sin x \Rightarrow v(x)=-\cos x$ sont continûment dérivables.

D'après la formule d' **IPP**,

$J=\left[u(x)v(x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} u'(x)v(x)dx=\left[-2e^{2x}\cos x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} 4e^{2x}(-\cos x)dx=2e^{2\pi}+2+4\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x dx=2e^{2\pi}+2+4I$

On aboutit donc à l'équation $I=-2e^{2\pi}-2-4I$ c'est-à-dire $5I=-2e^{2\pi}-2$ et on conclut ainsi que $\boxed{I=-\frac{2}{5}\left(e^{2\pi}+1\right)}$