

Fonction valeur absolue

I) Définition

On appelle **fonction valeur absolue**, la fonction définie sur \mathbb{R} , qui à tout réel x associe le réel noté $|x|$ tel que :

- Si x est positif ou nul $|x| = x$
- Si x est négatif $|x| = -x$ (l'opposé de x)

On notera dans la suite la fonction telle que $f(x) = |x|$

On notera f la fonction qui, à x , associe $|x|$.

Exemples :

$$|4| = 4 \quad ; \quad |-3| = 3 \quad ; \quad |1 - \sqrt{3}| = -(1 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$$

$$|x - 2| = x - 2 \text{ si } x \geq 2 \text{ et } |x - 2| = -x + 2 \text{ si } x \leq 2$$

Propriétés :

- $|x| \geq 0$ pour tout x réel
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\sqrt{x^2} = |x|$

II) Etude

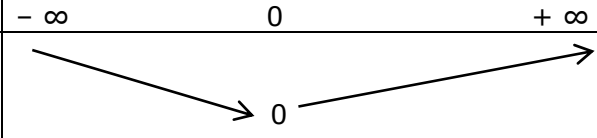
1) Variations de f sur \mathbb{R}

D'après la définition de la fonction f on a sur $] -\infty ; 0]$ $f(x) = -x$
et sur $[0 ; +\infty[$ $f(x) = x$ de là :

La fonction f est donc strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$, et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$

2) Tableau de variations et courbe :

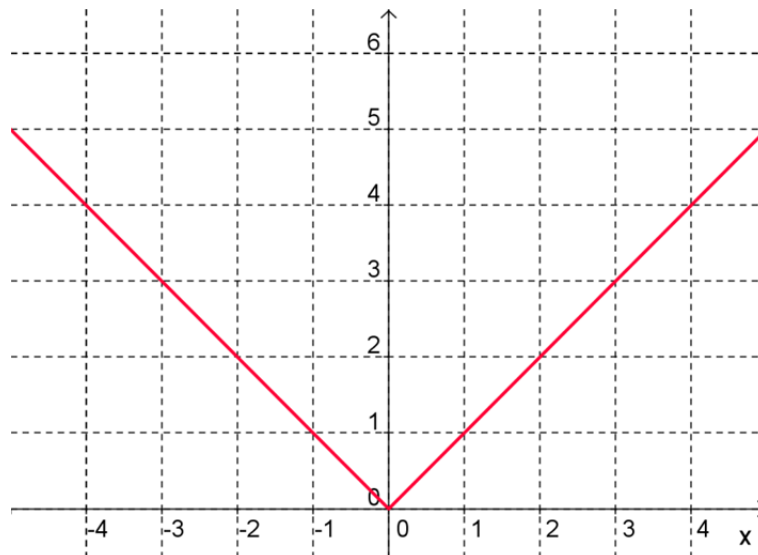
a) Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x $			

b) Courbe

Remarques :

- La courbe de la fonction f coïncide sur $] -\infty ; 0]$ avec la demi droite d'équation $y = -x$ et sur $[0 ; +\infty[$ avec la demi droite d'équation $y = x$
- La courbe de la fonction f admet donc (en repère orthogonal) l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. La fonction f est dite paire.



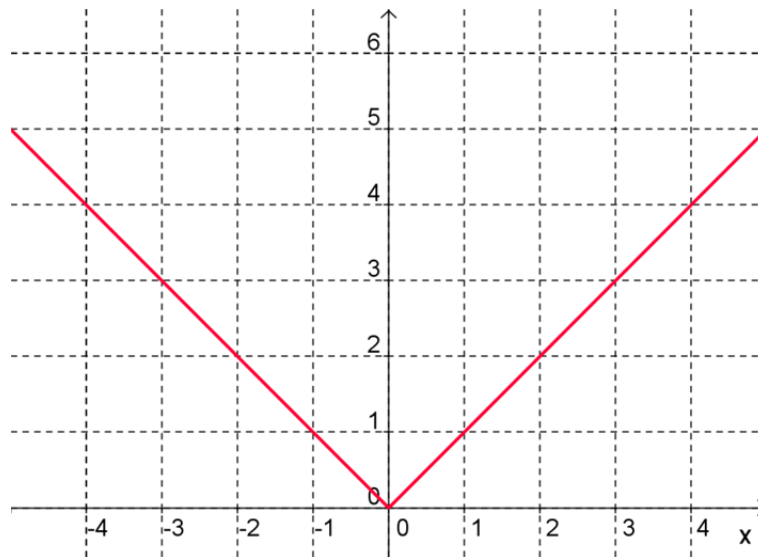
III) Compléments

1) Equations et inéquations:

a) Equation $|x| = k$

- Si k est strictement négatif cette équation n'a aucune solution
- Si $k = 0$ cette équation a une unique solution $x = 0$
- Si k est strictement positif cette équation a deux solutions $x = k$ ou $x = -k$

Illustration :



Exemples :

1°) Résoudre l'équation $|x| = 5$

Les solutions de cette équation sont $x = 5$ ou $x = -5$

2°) Résoudre l'équation $|3x - 5| = 4$

Cette équation équivaut à $3x - 5 = 4$ ou $-(3x - 5) = 4$ d'où ses solutions sont :

$$x = 3 \text{ ou } x = \frac{1}{3}$$

b) Equation $|x| = |y|$

Cette équation équivaut à $x = y$ ou $x = -y$

Exemple :

Résoudre l'équation $|2x + 4| = |5 - x|$

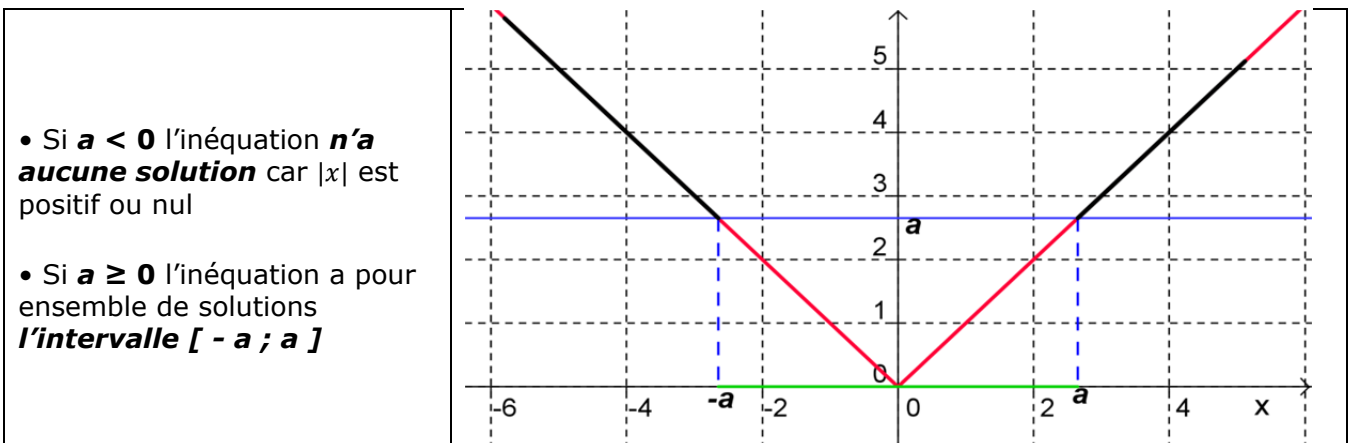
Cette équation équivaut à $2x + 4 = 5 - x$ ou $2x + 4 = -(5 - x)$

Soit encore à $3x = 1$ ou $x = -9$

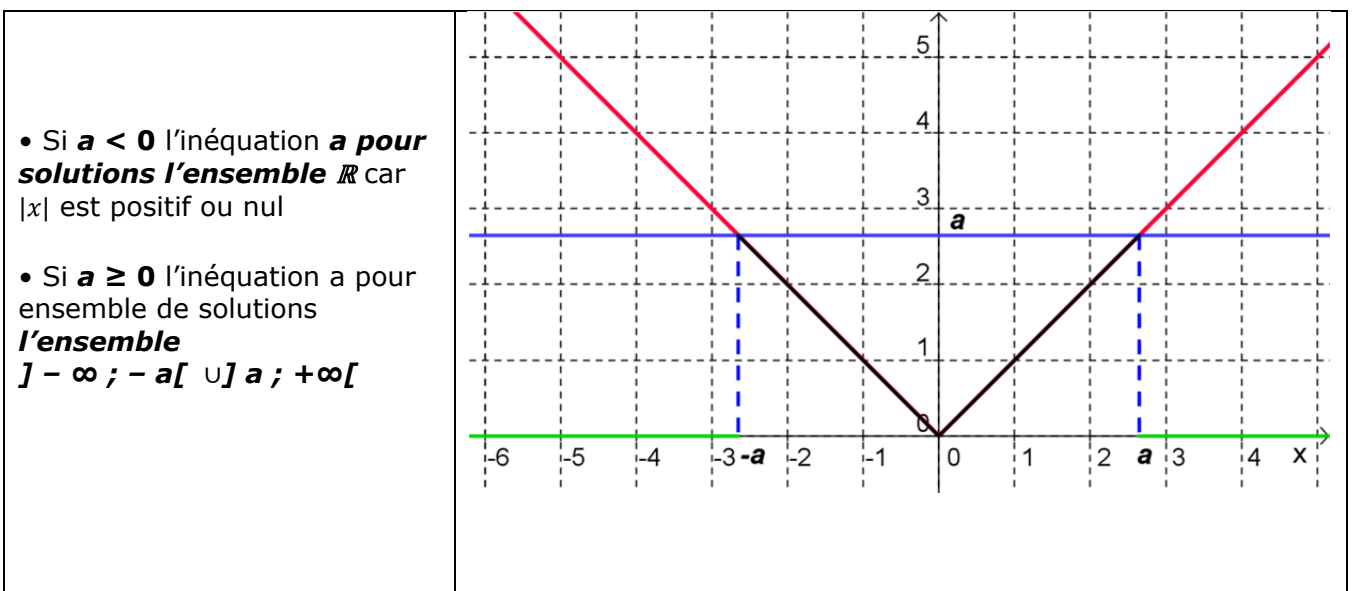
Les solutions sont donc $x = \frac{1}{3}$ ou $x = -9$

c) Inéquations $|x| \leq a$ et $|x| \geq a$

• **Inéquation $|x| < a$**



• **Inéquation $|x| \geq a$**



Exemples :

1°) Résoudre l'inéquation $|x| \leq 4$ Solutions : $x \in [-4 ; 4]$

2°) Résoudre l'inéquation $|x| \geq -2$ Solutions : \mathbb{R}

3°) Résoudre l'inéquation $|x| \leq -1$ Solutions : \emptyset

4°) Résoudre l'inéquation $|x| \geq \frac{3}{5}$ Solutions : $x \in] -\infty ; -\frac{3}{5}] \cup [\frac{3}{5} ; +\infty [$

5°) Résoudre l'inéquation $|2x - 1| \leq 5$
 Cette inéquation est équivalente à l'encadrement $-5 \leq 2x - 1 \leq 5$
 Soit $-2 \leq x \leq 3$ Solutions : $x \in [-2 ; 3]$

6°) Résoudre l'inéquation $|3x + 4| \geq 6$
 Cette inéquation est équivalente à $3x + 4 \leq -6$ ou $3x + 4 \geq 6$
 Soit $x \leq -\frac{10}{3}$ ou $x \geq \frac{2}{3}$ Solutions : $x \in] -\infty ; -\frac{10}{3}] \cup [\frac{2}{3} ; +\infty [$