I. Fonctions polynômes.

www.physique-maths.com

Définition. Une fonction f est une fonction polynôme (ou plus simplement un polynôme) si :
(1) Elle est définie sur **R**.
(2) Elle admet une écriture de la forme : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
où n est un entier naturel et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des réel appelés coefficients du polynôme.

Exemples. ▪ Les fonctions constantes $x \mapsto k$ sont les fonctions polynômes de degré 0.
▪ Les fonctions affines (non constantes) $x \mapsto ax + b$ avec $a \neq 0$ sont des fonctions polynômes. Parce que on peut les écrire $x \mapsto a_1 x + a_0$ avec a_1 coefficient directeur et a_0 ordonnée à l'origine.
▪ Les fonctions puissances $x \mapsto x^p$ (avec p entier naturel) sont des fonctions polynômes.
▪ Les fonctions $x \mapsto -3x^2 + x - 7$ ou $x \mapsto x^6 - 2x^4 + 3x - 1$ sont des fonctions polynômes.
En effet, la première s'écrit $x \mapsto a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ avec $a_2 = -3, a_1 = 1, a_0 = -7$.
La seconde s'écrit $x \mapsto a_6 x^6 + a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ avec :

$$a_6 = 1, a_5 = 0, a_4 = -2, a_3 = 0, a_2 = 2, a_1 = 3, a_0 = -1.$$

Exercice 1. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$ est une fonction polynôme.

Théorème (admis). ▪ Si la fonction polynôme $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ est la fonction nulle (c'est-à-dire égale à 0 pour tout x réel), alors tous les coefficients sont nuls : $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$.
▪ Toute fonction polynôme non nulle f admet une écriture unique de la forme $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$.

Exercice 2. Si pour tout x, $x^3 - 7x + 1 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, que valent a, b, c et d ?

Définitions. Soit f une fonction polynôme non nulle, dont l'écriture (unique) est :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \text{ avec } a_n \neq 0.$$

▪ L'entier n est appelé **degré** de f et on écrit $n = \deg f$.
▪ $a_n x^n$ est le terme de plus haut degré, $a_3 x^3$ est le terme de degré 3, a_0 est le terme de degré 0 ou terme constant.
▪ Nous conviendrons que le polynôme nul (dont tous les coefficients sont nuls) n'a pas de degré.

Exemple. Les fonctions affines (non nulles) sont les fonctions polynômes de degré 1 ou 0 (fonctions constantes).

Conséquences. Deux fonctions polynômes sont égales si et seulement si ils ont même degré et si tous les coefficients de même degré sont égaux.

Définition. Soit f une fonction polynôme non nulle.
Le réel α est une **racine** (ou un zéro) de f si et seulement si $f(\alpha) = 0$.

Exemples.
▪ La fonction polynôme $f(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ a deux racines 1 et -1 car $f(1) = 0$ et $f(-1) = 0$.
▪ La fonction polynôme $f(x) = x^2 + 1$ n'a pas de racine car $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in$ **R**.

Théorème (admis). La somme, la différence, le produit de deux fonctions polynômes sont encore des polynômes. La composée de deux polynômes est encore un polynôme. Le produit de deux polynômes non nuls est un polynôme dont le degré est la somme des degrés de ces polynômes.

Exercice 3. Soit $P(x) = 2x^2 - x + 1$ et $Q(x) = x^3 + 2$.
Donner l'écriture polynomiale de $f(x) = P(x)\,Q(x)$ et $g(x) = Q(x+1) - Q(x)$.

Exercice 4. Développer, réduire et ordonner $(a+b)^3$ et $(a-b)^3$.

II. Polynômes du second degré.

a) Forme développée, forme canonique.

Définition. On appelle polynôme du second degré (ou trinôme du second degré), une fonction P définie sur **R** de la forme $P(x) = a x^2 + b x + c$ où a, b, c sont des nombres ($a \neq 0$).
Cette expression est la **forme développée** (**ou réduite**) du polynôme.

Exemple. La fonction $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ est un polynôme du second degré (avec $a = 2$, $b = -3$, $c = 1$).

Propriété. Toute fonction polynôme du second degré peut s'écrire sous la **forme canonique** suivante :

$$P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \qquad \text{avec } \alpha = \frac{-b}{2a} \text{ et } \beta = P(\alpha).$$

Motivation. Nous savons développer une expression (du second degré) comme par exemple,

$$P(x) = (3x+1)(-x+2) = -3x^2 + 6x - x + 2 = -3x^2 + 5x + 2.$$

Mais le problème est de savoir factoriser. La forme canonique permettra de factoriser.

Démonstration.

$$P(x) = a x^2 + b x + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c\,.$$

Autrement dit, dans la propriété, $\boxed{\alpha = -\dfrac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = -\dfrac{b^2}{4a} + c}$.

Exercice 5. Donner la forme canonique de :

$P(x) = 2x^2 + 4x + 2$ et $Q(x) = -3x^2 + 12x + 6$ et $R(x) = 2x^2 - x + 2$.

b) Représentation graphique et sens de variation.

La courbe d'une fonction polynôme du second degré $P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ est une **parabole** de sommet **S (α ; β)**. Si $a > 0$, la parabole est dirigée vers le haut, si $a < 0$, elle est dirigée vers le bas.

Si $a > 0$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P(x)$	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

Si $a < 0$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 6. Trouver le sommet de la parabole définie par $P(x) = 2x^2 - 4x - 1$.
Faire le tableau de variation de P, puis tracer la parabole.

III. Équations du second degré.

Définition. C'est une équation de la forme $a x^2 + b x + c = 0$ où $a \neq 0$, b et c des nombres.

Exercice 7. On sait résoudre certaines équations du second degré :
a) Résoudre l'équation $x^2 - 3 = 0$. **b)** Résoudre l'équation $x^2 + 4x = 0$.
c) Donner la forme canonique de $x^2 + 2x - 1$, puis résoudre $x^2 + 2x - 1 = 0$.

Étude du cas général.
Il faut résoudre l'équation $a x^2 + b x + c = 0$, soit $a(x - \alpha)^2 + \beta = 0$,

soit $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$, soit $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0$,

soit $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$ en notant $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$.

Il nous faut donc résoudre l'équation $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$.

◆ Si $\Delta > 0$, alors $\sqrt{\Delta}$ existe et l'expression se factorise avec l'identité $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

Comme un produit est nul lorsque l'un des facteurs est nul, l'équation $\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$ admet deux solutions.

$$x_1 = -\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = -\frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

◆ Si $\Delta = 0$, alors l'équation s'écrit $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$.

Ce carré est nul lorsque $x + \frac{b}{2a} = 0$, c'est-à-dire $x = -\frac{b}{2a}$. On a une unique solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

◆ Si $\Delta < 0$, alors on doit résoudre $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$, soit $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} < 0$, aucune solution car un carré est toujours positif.

Théorème. Pour résoudre l'équation $a x^2 + b x + c = 0$ ($a \neq 0$), on calcule son discriminant $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$.

◆ Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

x_1 et x_2 sont appelés les racines du polynôme $P(x) = a x^2 + b x + c$.

◆ Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$ (dite racine double du polynôme P).

◆ Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet aucune solution.

Exercice 8. a) Résoudre les équations $2x^2+4x+2=0$, $-3x^2+12x+6=0$ et $x^2+3x+6=0$.
b) Résoudre les équations $5x^2-7=0$ et $2x^2+3x=0$. Est-il nécessaire d'utiliser le théorème ?!

Interprétation graphique. Les éventuelles racines d'un polynôme P correspondent aux abscisses des points d'intersection de la courbe C_P avec l'axe des abscisses.
Faire les trois figures en fonction du signe du discriminant.
Faire un tableau avec les six graphiques possibles en fonction du signe de a et du signe de Δ.

Théorème (somme et produit des racines).
Lorsque le trinôme ax^2+bx+c admet deux racines distinctes ou confondues, leur somme S et leur produit P sont données par les relations $S=-\frac{b}{a}$ et $P=\frac{c}{a}$.

Démonstration. ▪ Si les deux racines sont confondues $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$, alors $S=-\dfrac{b}{2a}-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{2b}{2a}=-\dfrac{b}{a}$.

$$P=\left(-\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}$$ et comme $\Delta=b^2-4ac=0$ alors $b^2=4ac$ donc $P=\dfrac{b^2}{4a^2}=\dfrac{4ac}{4a^2}=\dfrac{c}{a}$.

▪ Si les deux racines sont distinctes $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Alors $S=x_1+x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2b}{2a}=-\dfrac{b}{a}$.

Et $P=x_1\,x_2=\left(\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=\dfrac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}=\dfrac{b^2-\Delta}{4a^2}=\dfrac{4ac}{4a^2}=\dfrac{c}{a}$.

Exercice 9. On considère l'équation $2x^2-5x+3=0$.
1. Trouver une solution évidente.
2. Combien vaut la somme et le produit des solutions ?
3. En déduire l'autre solution.

Théorème.
Deux réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement si ils sont solutions de l'équation $x^2-Sx+P=0$.

Démonstration. En effet, si x_1 et x_2 vérifient $x_1+x_2=S$ et $x_1\,x_2=P$, alors $P=x_1\,x_2=x_1(S-x_1)=-x_1^2+S\,x_1$.
Donc $x_1^2-S\,x_1+P=0$. Cela montre que x_1 est solution de $x^2-Sx+P=0$. De même pour x_2.
Réciproquement, si x_1 et x_2 sont solutions de $x^2-Sx+P=0$, alors d'après le théorème précédent,
$x_1+x_2=\dfrac{S}{1}=S$ et $x_1\,x_2=\dfrac{P}{1}=P$.

Exercice 10. Trouver, s'ils existent, deux nombres dont la somme est 6 et le produit 1.

IV. Factorisation d'expressions du second degré.

La factorisation éventuelle dépend du signe du discriminant.

- Si $\boldsymbol{\Delta>0}$, alors $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les deux solutions de l'équation $P(x)=0$.
- Si $\boldsymbol{\Delta=0}$, alors $P(x)=a(x-x_0)^2$ où x_0 est la solution de l'équation $P(x)=0$.

Remarque. $P(x)$ est une identité remarquable à un facteur près.

- Si $\boldsymbol{\Delta<0}$, alors P ne peut pas se factoriser comme produit de deux facteurs du premier degré.

Exercice 11. Factoriser les polynômes P $(x) = 2x^2 + 4x + 2$, Q $(x) = -3x^2 + 12x + 6$ et R $(x) = x^2 + 3x + 6$.

V. Inéquations du second degré.

Exercice 12. a) Factoriser $2x^2 + 10x + 12$.
b) A l'aide d'un tableau de signe et de la forme factorisée, résoudre $2x^2 + 10x + 12 \geq 0$.

Remarque. On peut procéder plus rapidement, la courbe de P $(x) = 2x^2 + 10x + 12$ est une parabole dirigée vers le haut et elle coupe deux fois l'axe des abscisses (en -3 et -2), faire une figure…
Mettre en évidence le signe de P (x) suivant les valeurs de x et la position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses.

Théorème (signe de $a\,x^2 + b\,x + c$).
- Si $\Delta > 0$, alors $a\,x^2 + b\,x + c$ est du signe de a **à l'extérieur des racines x_1 et x_2.**
- Si $\Delta = 0$, alors $a\,x^2 + b\,x + c$ est du signe de a (sauf en la racine x_0 où cela vaut 0).
- Si $\Delta < 0$, alors $a\,x^2 + b\,x + c$ est du signe de a (pour tout $x \in \mathbf{R}$).

Précisément, lorsque $\Delta > 0$, on a le tableau :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Exercice 13. Résoudre l'inéquation $-3x^2 + 12x + 6 \geq 0$ en utilisant le théorème.

Nous pouvons résumer les résultats importants de ce chapitre dans un tableau.

Discriminant $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Solution(s) de l'équation $a\,x^2 + b\,x + c = 0$			
Factorisation de $P\,(x) = a\,x^2 + b\,x + c$			
$a > 0$ Position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses Signe de $P\,(x)$ $a < 0$ Position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses Signe de $P\,(x)$			

Exercice 1. Montrons que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$ est une fonction polynôme.

D'abord, comme $x_2 + 1 > 0$ pour tout $x \in$ **R**, alors f est définie sur **R**.

Puis $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 1} = \dfrac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x^2 + 1} = x^2 + 1$, ce qui prouve que f est bien un polynôme.

Exercice 2. Si pour tout x, $x^3 - 7x + 1 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, que valent a, b, c et d ?
Puisqu'une fonction polynôme a une écriture unique, alors $a = 1$, $b = 0$, $c = -7$ et $d = 1$.

Exercice 3. Soit $P(x) = 2x^2 - x + 1$ et $Q(x) = x^3 + 2$.
Donnons l'écriture polynomiale de $f(x) = P(x)\,Q(x)$ et $g(x) = Q(x + 1) - Q(x)$.
$f(x) = P(x)\,Q(x) = (2x^2 - x + 1)(x^3 + 2) = 2x^5 + 4x^2 - x^4 - 2x + x^3 + 2 = 2x^5 - x^4 + x^3 + 4x^2 - 2x + 2$.
$Q(x + 1) - Q(x) = (x + 1)^3 + 2 - (x^3 + 2) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 2 - x^3 - 2 = 3x^2 + 3x + 1$.

Exercice 4. Développons, réduisons et ordonnons :

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$
$$(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) = a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Exercice 5. $P(x) = 2(x^2 + 2x + 1) = 2(x + 1)^2$.
$Q(x) = -3(x^2 - 4x) + 6 = -3(x - 2)^2 + 12 + 6 = -3(x - 2)^2 + 18$.

Pour $R(x)$, $R(x) = 2x^2 - x + 2$, $\qquad \alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-1}{4} = \dfrac{1}{4}$,

$$\beta = R(\alpha) = R\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} + 2 = 2 \times \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + 2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 2 = -\frac{1}{8} + 2 = \frac{15}{8}.$$

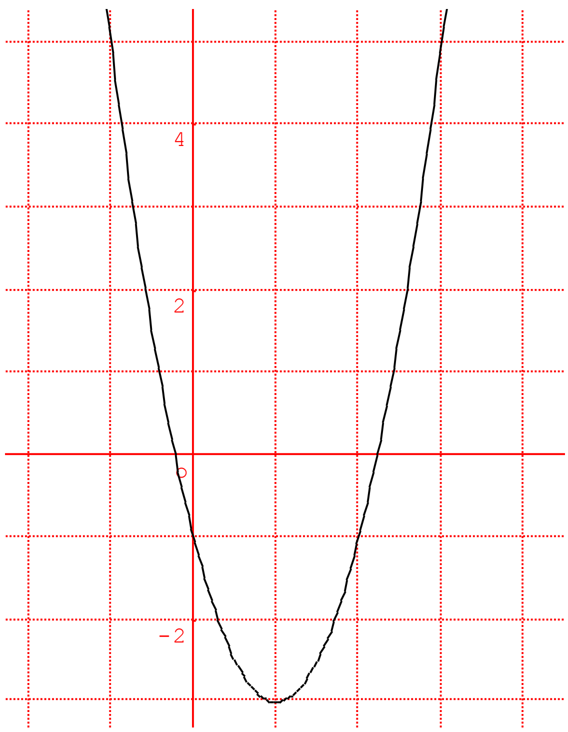
Donc $R(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta = 2\left(x - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{15}{8}$.

Exercice 6. $P(x) = 2x^2 - 4x - 1$.

On a $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2 \times 2} = 1$ et $\beta = P(1) = -3$.

Donc le sommet est $S(1\,;-3)$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$P(x)$	$+\infty$ ↘	-3	↗ $+\infty$



Exercice 7. On sait résoudre certaines équations du second degré :

a) Résolvons l'équation $x^2 - 3 = 0$ donc $x^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$.

Donc $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$, donc $x + \sqrt{3} = 0$ ou $x - \sqrt{3} = 0$.

Donc $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$. S = $\{-\sqrt{3} ; \sqrt{3}\}$.

b) Résolvons l'équation $x^2 + 4x = 0$ donc $x(x + 4) = 0$ donc $x = 0$ ou $x + 4 = 0$ donc $x = 0$ ou $x = -4$. S = $\{-4 ; 0\}$.

c) $x^2 + 2x - 1 = (x + 1)^2 - 2$.

On utilise ensuite l'identité remarquable $A^2 - B^2$ pour factoriser.

$(x + 1)^2 - 2 = 0$ équivaut à $(x + 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2}) = 0$.

Un produit est nul lorsque l'un des facteurs est nul :

$x + 1 + \sqrt{2} = 0$ ou $x + 1 - \sqrt{2} = 0$.

Donc, il y a deux solutions $x_1 = -1 - \sqrt{2}$, $x_2 = -1 + \sqrt{2}$.

Cette méthode peut se généraliser.

Exercice 8. a) ◆ Pour $2x^2 + 4x + 2 = 0$. $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac} = 16 - 4 \times 2 \times 2 = \mathbf{0}$.

L'équation admet donc une unique solution (ou le polynôme a une seule racine) : $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{2 \times 2} = 1$. $\boxed{S = \{1\}}$.

Remarquons que les équations $2x^2 + 4x + 2 = 0$ et $x^2 + 2x + 1 = 0$ ont les mêmes solutions.

◆ Pour $-3x^2 + 12x + 6 = 0$. $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac} = 12^2 - 4 \times (-3) \times 6 = 144 + 72 = 216 > \mathbf{0}$. Deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-12 - \sqrt{216}}{2 \times (-3)} = \dfrac{-12 - 6\sqrt{6}}{-6} = 2 + \sqrt{6}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-12 + \sqrt{216}}{2 \times (-3)} = \dfrac{-12 + 6\sqrt{6}}{-6} = 2 - \sqrt{6}$.

$\boxed{S = \{2 + \sqrt{6} ; 2 - \sqrt{6}\}}$.

Remarque. Il aurait été plus judicieux de résoudre l'équation $x^2 - 4x - 2 = 0$ qui a les mêmes racines.

◆ Pour $x^2 + 3x + 6 = 0$. $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac} = 3^2 - 4 \times 1 \times 6 = 9 - 24 = -15 < \mathbf{0}$.

Donc cette équation n'a pas de solution. S = ∅.

b) ◆ Pour l'équation $5x^2 - 7 = 0$. Il n'est pas nécessaire d'utiliser le théorème.

$5x^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 = 7 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{7}{5} \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{7}{5}}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{7}{5}}$ $\boxed{S = \left\{-\sqrt{\dfrac{7}{5}} ; \sqrt{\dfrac{7}{5}}\right\}}$.

◆ Pour l'équation $2x^2 + 3x = 0$. Il n'est pas nécessaire d'utiliser le théorème.

$2x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(2x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\dfrac{3}{2}$. $\boxed{S = \left\{0 ; -\dfrac{3}{2}\right\}}$.

Exercice 9. On considère l'équation $2x^2 - 5x + 3 = 0$.

1. 1 est une solution évidente car $2 \times 1^2 - 5 \times 1 + 3 = 2 - 5 + 3 = 0$.

2. D'après le théorème du cours, la somme des solutions est $S = -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{2} = \frac{5}{2}$ et le produit $P = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$.

3. Puisque $x_1 = 1$ et $P = \frac{3}{2}$, alors $x_2 = \frac{3}{2}$.

Exercice 10. Trouvons, s'ils existent, deux nombres dont la somme est 6 et le produit 1.

D'après le théorème du cours, de tels nombres seraient solutions de l'équation $x^2 - 6x + 1 = 0$.

On calcule son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 36 - 4 = 32 > 0$.

Il y a donc deux solutions $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6 - \sqrt{32}}{2} = 3 - 2\sqrt{2}$ et $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6 + \sqrt{32}}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$.

Les nombres cherchés sont $3 - 2\sqrt{2}$ et $3 + 2\sqrt{2}$.

Exercice 11. P $(x) = 2\,x^2 + 4\,x + 2 = 2\,(x-1)^2$. En effet, $\Delta = b^2 - 4\,a\,c = 16 - 4 \times 2 \times 2 = \mathbf{0}$.

Et l'équation $2\,x^2 + 4\,x + 2 = 0$ admet une unique solution $x = -\dfrac{b}{2\,a} = -\dfrac{4}{2 \times 2} = 1$.

Q $(x) = -3\,x^2 + 12\,x + 6 = -3\,(x - 2 - \sqrt{6})(x - 2 + \sqrt{6})$.
En effet, $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4\,a\,c} = 12^2 - 4 \times (-3) \times 6 = 144 + 72 = 216 > \mathbf{0}$ et l'équation $-3\,x^2 + 12\,x + 6 = 0$ admet deux solutions qui sont $x_1 = 2 + \sqrt{6}$ et $x_2 = 2 - \sqrt{6}$.
R $(x) = x^2 + 3\,x + 6$ ne se factorise pas.
En effet, $\Delta = b^2 - 4\,a\,c = 3^2 - 4 \times 1 \times 6 = 9 - 24 = -15 < 0$ et l'équation $x^2 + 3\,x + 6 = 0$ n'a pas de solution.

Exercice 12. On veut résoudre l'inéquation du second degré $2\,x^2 + 10\,x + 12 \geq 0$.
On calcule d'abord le discriminant $\Delta = 100 - 4 \times 2 \times 12 = 4 = 2^2$.
On calcule ensuite $x_1 = -3$ et $x_2 = -2$ et on factorise $2\,x^2 + 10\,x + 12 = 2\,(x+3)\,(x+2)$.
On doit donc résoudre l'inéquation $2\,(x+3)\,(x+2) \geq 0$. On fait un tableau de signe :

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
2		+	|	+	|	+	
$x+3$		–	0	+	|	+	
$x+2$		–	|	–	0	–	
$2\,x^2 + 10\,x + 12$		+	0	–	0	–	

Donc S = $]-\infty\,;-3\,] \cup [\,-2\,;+\infty[$.

Exercice 13. On résout d'abord l'équation $-3\,x^2 + 12\,x + 6 = 0$.
$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4\,a\,c} = 12^2 - 4 \times (-3) \times 6 = 144 + 72 = 216 > \mathbf{0}$.
L'équation $-3\,x^2 + 12\,x + 6 = 0$ admet deux solutions qui sont $x_1 = 2 + \sqrt{6}$ et $x_2 = 2 - \sqrt{6}$.

x	$-\infty$		$2-\sqrt{6}$		$2+\sqrt{6}$		$+\infty$
$-3\,x^2 + 12\,x + 6$		–	0	+	0	–	

Donc S = $\left[2-\sqrt{6}\,;2+\sqrt{6}\right]$.

Fonctions polynômes.

Exercice 1. Parmi les fonctions suivantes, indiquer lesquelles sont des polynômes.

1. $f(x) = (x^2 + 1)(x - 1)$

2. $g(x) = \left(x\sqrt{x} + 1\right)^2$

3. $h(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^2 + 1}$

4. $i(x) = \sin^2 x - 3 \sin x + 2$

5. $j(x) = \sqrt{x^4 + 6x^2 + 9}$

6. $k(x) = 2 - 7\sqrt{2}$.

Exercice 2. Dans chacun des cas, indiquer si le nombre α est une racine du polynôme P.

1. $P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$ et $\alpha = \sqrt{2}$.
2. $P(x) = -x^4 + x^3 + x^2 - x + 1$ et $\alpha = -1$.
3. $P(x) = 3x^2 - 2x + 1$ et $\alpha = 1$.
4. $P(x) = (3x^2 - 1)(-3x + 1)$ et $\alpha = \frac{1}{3}$.

Exercice 3. On considère le polynôme P défini par $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$.
1. Vérifier que 1 est une racine de ce polynôme.
On admet dans ce cas, qu'on peut mettre $(x - 1)$ en facteur dans $P(x)$.
2. Déterminer les réels a, b, c tels que $P(x) = (x - 1)(a x^2 + b x + c)$.
3. Factoriser $P(x)$.
4. Résoudre $P(x) = 0$ et donner le signe de $P(x)$.

Exercice 4. Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que $P(x + 1) - P(x) = x$.

Exercice 5. Soit P un polynôme de degré 4. On pose $P(x) = a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + e$, où a, b, c, d et e sont des nombres réels. Sachant que :
- le terme constant de P vaut 10 ;
- il n'y a pas de monôme de degré 2 ;
- $P(1) = 24$;
- $P(-1) = 0$;
- $P(2) = 0$.

Déterminer $P(x)$.

Exercice 6. Dans chaque cas, déterminer la composée $Q \circ P$ des polynômes suivants :
1. $P(x) = x^2$ et $Q(x) = 2x^3 - x + 1$.
2. $P(x) = 2x + 3$ et $Q(x) = 3x^2 - 2x$.
3. $P(x) = x^5 + x^2 + 2$ et $Q(x) = x^2$.
Peut-on conjecturer un résultat contenant $\deg(Q \circ P)$?

Polynômes du second degré.

Exercice 7. Soit $P(x) = x^2 - 4x + 3$ et $Q(x) = (x - 2)^2 - 1$.
1. Vérifier que, pour tout réel x, $P(x) = Q(x)$.
2. En déduire une factorisation de $P(x)$, si cela est possible.

Exercice 8. Écrire chacun des polynômes suivants sous sa forme réduite, puis sous sa forme canonique et faire le tableau de variation.

1. $P(x) = x(x-2) + 3$

2. $Q(x) = 1 - (x-1)(2x+3)$

3. $R(x) = (x-1)^2 - 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$

4. $S(x) = 1 - 2x - 3x^2$.

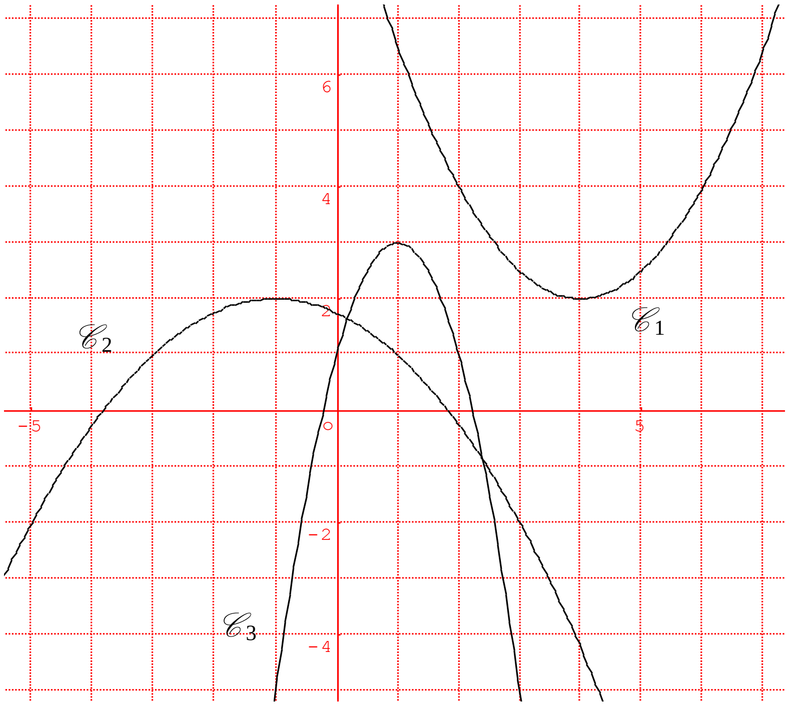
Exercice 9. Parabole et fonction.

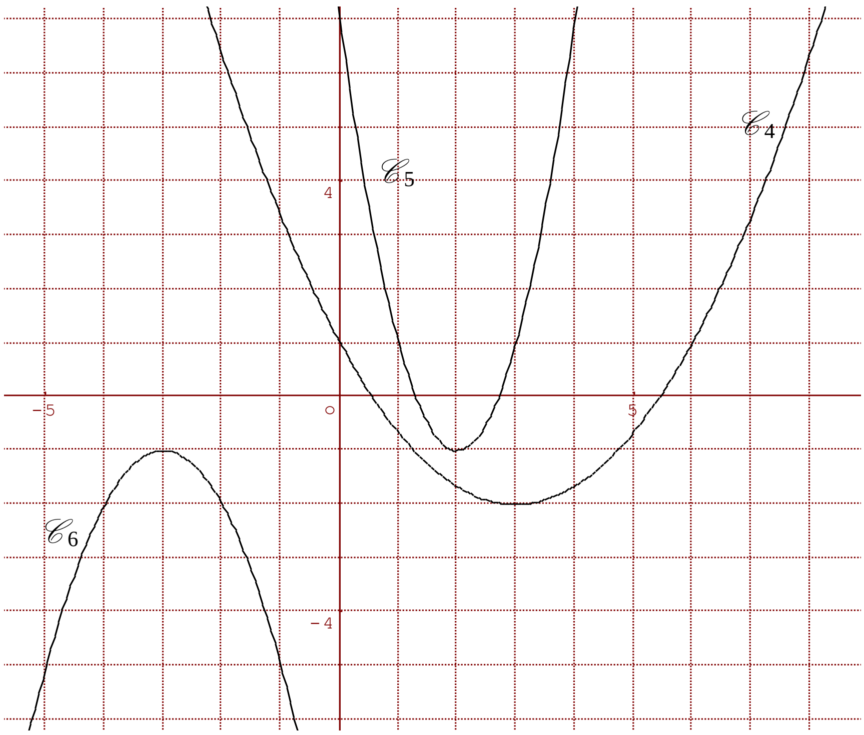
Les paraboles représentent les fonctions polynômes P, Q, R, S, T, U définies sur **R** par :

$P(x) = -\dfrac{1}{4}(x+1)^2 + 2$ $\quad Q(x) = -2(x-1)^2 + 3$ $\quad R(x) = \dfrac{1}{2}(x-4)^2 + 2$

$S(x) = 2(x-2)^2 - 1$ $\quad T(x) = -(x+3)^2 - 1$ $\quad U(x) = \dfrac{1}{3}(x-3)^2 - 2$.

Associer à chaque fonction polynôme, sa courbe $\mathscr{C}$, en justifiant (repérer le sommet par exemple).





Exercice 10. Faire le tableau de variation de chacune des fonctions polynômes définies sur **R**.

1. $P(x) = 2(x + 1)^2 - 1$

2. $Q(x) = (x - 1)^2 - \frac{1}{2}$

3. $R(x) = -\frac{1}{2}(x + 5)^2 + 100$

4. $S(x) = 0{,}01(x + 60)^2 + 350$

5. $T(x) = 7(4 - x)^2 + 11$

6. $U(x) = -3(x - 0{,}1)^2$.

Équations du second degré.

Exercice 11. Résoudre les équations suivantes à l'aide du discriminant.

1. $x^2 - 5x + 3 = 0$

2. $x^2 + x = 1$

3. $x(x + 6) = 8$

4. $4x^2 = 12x + 7$

5. $10x^2 + 29x - 3 = 0$

6. $6x^2 - 11x - 7 = 0$

7. $2x^2 + 4x + 5 = 0$

8. $9x^2 - 42x + 49 = 0$.

Exercice 12. Résoudre chaque équation après avoir deviné une solution évidente.

1. $3x^2 - 7x + 4 = 0$

2. $\frac{x^2}{4} - x + 1 = 0$

3. $-7x^2 - 6x + 1 = 0$.

Exercice 13. Déterminer, s'ils existent, deux réels u et v connaissant leur somme S et leur produit P dans les cas suivants.

1. S = 1 et P = 1

2. S = 10 et P = 20,5

3. S = – 6 et P = 9.

Factorisation d'expressions du second degré.

Exercice 14. Après avoir cherché les racines éventuelles à l'aide du discriminant, en déduire une factorisation de chaque polynôme dans le cas où cela est possible.

1. $6x^2 + x - 2$

2. $x^2 + 2x - 3$

3. $2x^2 + 10x + 12$

4. $-2x^2 + 5x - 2$

5. $-3x^2 + 2x - 1$

6. $x^2 + 6x - 7$

7. $-4x^2 - 3x + 1$

8. $3x^2 + 8x - 3$

9. $6x^2 + 2x + 1$

10. $-3x^2 + 2x + 1$.

Inéquations du second degré.

Exercice 15. Déterminer les racines des polynômes suivants, donner leur factorisation et leur signe par un tableau de signes :

$A(x) = 2x^2 + 4x - 30$

$B(x) = -3x^2 - x + 4$

$C(x) = -2x^2 + 9x - 4$

$D(x) = 5x^2 - 2x$.

Exercice 16. Résoudre les inéquations suivantes (utiliser un tableau de signes si nécessaire).

1. $3x - 1 + \frac{5}{1 - x} < 0$

2. $x + 1 - \frac{x}{2x + 1} > 0$

3. $4 - \frac{1}{(x - 2)^2} \leq 0$

4. $-2 - \frac{1}{x - 1} + \frac{6}{3 - x} \geq 0$.

Équations paramétriques.

Exercice 17. Déterminer m pour que l'équation $m\,x^2 - 2\,(m-1)\,x + 3\,m + 2 = 0$ admette 1 pour racine. Déterminer alors l'autre racine.

Exercice 18. On considère l'équation $(m-1)\,x^2 - 4\,m\,x + 4\,m - 1 = 0$.
1. Pour quelles valeurs de m l'équation est-elle du second degré ?
2. On suppose $m \neq 1$. Pour quelles valeurs de m l'équation admet-elle une solution double ?
3. Pour quelles valeurs de m l'équation a-t-elle deux solutions réelles distinctes ?

Exercice 19. m est un réel différent de 2. On considère l'équation d'inconnue x : $(m-2)\,x^2 + 5\,x + 7 - m = 0$.
1. Démontrer que, quel que soit m, -1 est racine de cette équation.
2. Calculer l'autre racine sans calculer le discriminant.
3. Déterminer m pour que l'autre racine soit égale à 10.

Équations se ramenant à une équation du second degré.

Exercice 20. Équations bicarrées.
En posant $X = x^2$, résoudre les équations :
1. $x^4 - x^2 - 6 = 0$ **2.** $4\,x^4 + 9\,x^2 + 2 = 0$ **3.** $5\,x^4 - 44\,x^2 - 9 = 0$.

Exercice 21.
1. En posant $X = \sqrt{x}$, résoudre l'équation $4\,x + 5\sqrt{x} - 9 = 0$.
2. Avec un changement de variable adapté, résoudre l'équation $\frac{5}{x^2} - \frac{6}{x} + 1 = 0$.
3. Avec un changement de variable adapté, résoudre l'équation $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ sur $0 ; \frac{\pi}{2}$.

Exercice 22. Équation aux coefficients symétriques.
On considère l'équation $6\,x^4 + 5\,x^3 - 38\,x^2 + 5\,x + 6 = 0$ (E).
1. Que constate t-on pour les coefficients ? 0 est-il solution de l'équation (E) ?
2. Montrer que l'équation (E) est équivalente à $6\,x^2 + 5\,x - 38 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$.
3. On pose $X = x + \frac{1}{x}$.
Montrer alors que x est solution de (E), si et seulement si, X est solution de $6\,X^2 + 5\,X - 50 = 0$ (F).
4. Résoudre l'équation (F).
5. Montrer alors que x est solution de (E) si et seulement si x est solution de deux équations du second degré (E_1') et (E_2') que l'on déterminera.
6. Résoudre les équations (E_1') et (E_2').
7. En déduire les solutions de l'équation (E).

Racine et factorisation.

Exercice 23. On considère le polynôme $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$.
1. Vérifier que $P(x) = (x + 3)(x^2 + x - 2)$.
2. En déduire la résolution de l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 24. On considère le polynôme $P(x) = -3x^3 + 11x^2 + 24x - 20$.
1. Déterminer les réels a, b, c tels que $P(x) = (x + 2)(ax^2 + bx + c)$
2. Factoriser $P(x)$ sous forme de facteur de degré 1.
3. En déduire la résolution de l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 25. On se propose de résoudre dans **R** l'équation $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$ (E).
1. Effectuer le changement de variable $y = x + 2$.
2. Montrer que résoudre (E) équivaut à résoudre l'équation $y^3 - 3y + 2 = 0$ (E').
3. Déterminer a, b, c tels que, pour tout réel y, $y^3 - 3y + 2 = (y - 1)(ay^2 + by + c)$.
4. En déduire les solutions dans **R** de l'équation (E') puis celles de l'équation (E).

Exercice 26. Un résultat théorique.
1. Pour tout $n \geq 0$, développer, réduire et ordonner le produit $(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$.
2. On considère le polynôme $P(x) = x^n - 1$. Déduire de la question 1 que P se factorise par $x - 1$ et détailler les égalités obtenues pour $n = 2$ et $n = 3$.
3. Soit a et b deux réels, démontrer l'identité :

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Indication : utiliser la question 1 avec $x = \frac{a}{b}$.
Détailler les égalités obtenues pour $n = 2$ et $n = 3$.
4. On pose $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.
En utilisant la question précédente, montrer que $P(x) - P(a)$ se factorise par $(x - a)$ pour tout réel a.
5. En déduire que pour tout polynôme P (avec $\deg P \geq 1$) et tout réel a, il existe un polynôme Q (avec $\deg Q = \deg P - 1$) tel que $P(x) = (x - a)Q(x)$.
6. Etablir alors le raisonnement fondamental suivant :
« Un polynôme de degré supérieur ou égal à 1 peut se factoriser par $x - a$ si et seulement si $P(a) = 0$ ».

Fonctions polynômes.

Exercice 1. Parmi les fonctions suivantes, $f(x) = (x^2 + 1)(x - 1) = x^3 - x^2 + x - 1$ et $k(x) = 2 - 7\sqrt{2}$ sont les fonctions polynômes.

$g(x) = \left(x\sqrt{x} + 1\right)^2 = \left(x\sqrt{x}\right)^2 + 2\left(x\sqrt{x}\right) + 1 = x^3 + 2x\sqrt{x} + 1$ n'est pas une fonction polynôme.

$h(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^2 + 1}$ est le quotient de deux fonctions polynômes (fonction rationnelle) mais n'est pas un polynôme.

$i(x) = \sin^2 x - 3\sin x + 2$ est un polynôme trigonométrique mais n'est pas un polynôme.

$j(x) = \sqrt{x^4 + 6x^2 + 9}$ n'est pas une fonction polynôme (racine carrée non simplifiable…)

Exercice 2. Dans chacun des cas, indiquons si le nombre α est une racine du polynôme P.

1. $P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$ et $\alpha = \sqrt{2}$.

$P(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 - 2(\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} + 4 = 2\sqrt{2} - 4 - 2\sqrt{2} + 4 = 0$.

Donc $\sqrt{2}$ est une racine de P.

2. $P(x) = -x^4 + x^3 + x^2 - x + 1$ et $\alpha = -1$.

$P(-1) = -(-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) + 1 = -1 - 1 + 1 + 1 + 1 = 1$.

Donc -1 n'est pas racine de P.

3. $P(x) = 3x^2 - 2x + 1$ et $\alpha = 1$.

$P(1) = 3 \times 1^2 - 2 \times 1 + 1 = 3 - 2 + 1 = 4$.

Donc 1 n'est pas racine de P.

4. $P(x) = (3x^2 - 1)(-3x + 1)$ et $\alpha = \frac{1}{3}$.

$P\left(\frac{1}{3}\right) = \left(3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1\right)\left(-3 \times \frac{1}{3} + 1\right) = \left(3 \times \frac{1}{9} - 1\right)(-1 + 1) = \left(\frac{1}{3} - 1\right) \times 0 = 0$.

Donc $\frac{1}{3}$ est une racine de P.

Exercice 3. On considère le polynôme P défini par $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$.

1. Vérifions que 1 est une racine de ce polynôme.

$P(1) = 1^3 + 3 \times 1^2 - 4 = 1 + 3 - 4 = 0$. Donc 1 est une racine de P.

On admet dans ce cas, qu'on peut mettre $(x - 1)$ en facteur dans $P(x)$.

2. Déterminons les réels a, b, c tels que $P(x) = (x - 1)(a x^2 + b x + c)$.

$P(x) = (x - 1)(a x^2 + b x + c) = a x^3 + b x^2 + c x - a x^2 - b x - c = a x^3 + (b - a) x^2 + (c - b) x - c$.

On doit donc avoir $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4 = a x^3 + (b - a) x^2 + (c - b) x - c$. Or deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux.

Soit le système $\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 3 \\ c - b = 0 \\ -c = -4 \end{cases}$ puis $\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 4 \end{cases}$. Donc on a $P(x) = (x - 1)(x^2 + 4x + 4)$.

3. Factorisons $P(x) = (x - 1)(x^2 + 4x + 4) = (x - 1)(x + 2)^2$.

4. On résout $P(x) = 0$ soit $(x - 1)(x + 2)^2 = 0$. Un produit est nul lorsque l'un des facteurs est nul.

Donc $P(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $(x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -2$.

Donner le signe de $P(x)$ dans un tableau.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+2)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$\mathrm{P}(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 4. Déterminons un polynôme P de degré 2 tel que $\mathrm{P}(x+1) - \mathrm{P}(x) = x$.
Puisque P est de degré 2, il s'écrit $\mathrm{P}(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ (avec $a \neq 0$).

Ainsi $\mathrm{P}(x+1) - \mathrm{P}(x) = x \Leftrightarrow a(x+1)^2 + b(x+1) + c - (a\,x^2 + b\,x + c) = x$

$$\Leftrightarrow a\,x^2 + 2\,a\,x + a + b\,x + b + c - a\,x^2 - b\,x - c - x = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\,a - 1)\,x + a + b = 0.$$

Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Donc $(2\,a-1)\,x + a + b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,a - 1 = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$. Il n'y a pas de condition sur c qui peut être pris quelconque. Par exemple, $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ et $c = 0$ est une solution du ce système.

Donc $\mathrm{P}(x) = \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{2}$ est un polynôme qui vérifie $\mathrm{P}(x+1) - \mathrm{P}(x) = x$.

Exercice 5. Soit P un polynôme de degré 4. On pose $\mathrm{P}(x) = a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + e$, où a, b, c, d et e sont des nombres réels.

- Puisque le terme constant de P vaut 10, alors P s'écrit $\mathrm{P}(x) = a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + 10$.
- Puisque P n'a pas de monôme de degré 2, alors P s'écrit $\mathrm{P}(x) = a\,x^4 + b\,x^3 + d\,x + 10$.
- Comme $\mathrm{P}(1) = 24$, alors $a + b + d + 10 = 24$ (L_1).
- Comme $\mathrm{P}(-1) = 0$, alors $a - b - d + 10 = 0$ (L_2).
- Comme $\mathrm{P}(2) = 0$, alors $16\,a + 8\,b + 2\,d + 10 = 0$ (L_3).

On doit donc résoudre le système $\begin{matrix} \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \end{matrix} \begin{cases} a + b + d = 14 \\ a - b - d = -10 \\ 16\,a + 8\,b + 2\,d = -10 \end{cases}$ soit $\begin{matrix} \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2 \\ 16\,\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \end{matrix} \begin{cases} a + b + d = 14 \\ 2\,b + 2\,d = 24 \\ 8\,b - 14\,d = 234 \end{cases}$ d'où

$\begin{cases} a + b + d = 14 \\ b + d = 12 \\ 4\,b - 7\,d = 117 \end{cases}$ puis $\begin{cases} a + b + d = 14 \\ d = 12 - b \\ 4\,b + 7\,(12 - b) = 117 \end{cases}$ et $\begin{cases} a + b + d = 14 \\ d = 12 - b \\ -3\,b + 84 = 117 \end{cases}$ donc $\begin{cases} a + b + d = 14 \\ d = 12 - b \\ -3\,b = 33 \end{cases}$ ainsi $\begin{cases} a + b + d = 14 \\ d = 12 - b \\ b = -11 \end{cases}$.

En remplaçant b par -11, on obtient $d = 23$ avec la deuxième ligne, puis en remplaçant b par -11 et d par 23, on obtient encore $a = 2$ avec la première ligne.
Le polynôme cherché est donc $\mathrm{P}(x) = 2\,x^4 - 11\,x^3 + 23\,x + 10$.

Exercice 6. Dans chaque cas, déterminons la composée $\mathrm{Q} \circ \mathrm{P}$ des polynômes suivants :

1. $\mathrm{P}(x) = x^2$ et $\mathrm{Q}(x) = 2\,x^3 - x + 1$.
$(\mathrm{Q} \circ \mathrm{P})(x) = \mathrm{Q}(\mathrm{P}(x)) = 2\,\mathrm{P}(x)^3 - \mathrm{P}(x) + 1 = (x^2)^3 - x^2 + 1 = x^6 - x^2 + 1$.

2. $\mathrm{P}(x) = 2\,x + 3$ et $\mathrm{Q}(x) = 3\,x^2 - 2\,x$.
$(\mathrm{Q} \circ \mathrm{P})(x) = \mathrm{Q}(\mathrm{P}(x)) = 3\,\mathrm{P}(x)^2 - 2\,\mathrm{P}(x) = 3\,(2\,x+3)^2 - 2\,(2\,x+3) = 3\,(4\,x^2 + 12\,x + 9) - 4\,x - 6$
$= 12\,x^2 + 36\,x + 27 - 4\,x - 6 = 12\,x^2 + 32\,x + 21$.

3. $\mathrm{P}(x) = x^5 + x^2 + 2$ et $\mathrm{Q}(x) = x^2$.
$(\mathrm{Q} \circ \mathrm{P})(x) = \mathrm{Q}(\mathrm{P}(x)) = (x^5 + x^2 + 2)^2 = x^{10} + x^4 + 4 + 2\,x^7 + 4\,x^2 + 4\,x^5 = x^{10} + 2\,x^7 + 4\,x^5 + x^4 + 4\,x^2 + 4$.

On peut visiblement conjecturer que $\deg(\mathrm{Q} \circ \mathrm{P}) = \deg(\mathrm{Q})\,\deg(\mathrm{P})$.

Polynômes du second degré.

Exercice 7. Soit P $(x) = x^2 - 4x + 3$ et Q $(x) = (x-2)^2 - 1$.

1. Vérifions que, pour tout réel x, P (x) = Q (x).

Q $(x) = (x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 4 - 1 = x^2 - 4x + 3$ = P (x).

2. Nous en déduisons une factorisation de P (x).

P $(x) = (x-2)^2 - 1 = (x-2)^2 - 1^2 = (x-2+1)(x-2-1) = (x-1)(x-3)$.

Exercice 8.

Écrivons pour chacun des polynômes suivants sous sa forme réduite, puis sous sa forme canonique.

1. P $(x) = x(x-2) + 3 = x^2 - 2x + 3$ (forme réduite).

On calcule $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2}{2} = 1$ puis $\beta = P(\alpha) = P(1) = 1^2 - 2\times 1 + 3 = 1 - 2 + 3 = 2$.

Donc P $(x) = (x-1)^2 + 2$ (forme canonique).

Puisque $a = 1 > 0$, la parabole représentant P est dirigée vers le haut. Donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
P (x)	$+\infty$ ↘	2	↗ $+\infty$

2. Q $(x) = 1 - (x-1)(2x+3) = 1 - (2x^2 + 3x - 2x - 3) = 1 - 2x^2 - x + 3 = -2x^2 - x + 4$ (forme réduite).

On calcule $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-1}{-2\times 2} = -\dfrac{1}{4}$ puis

$$\beta = Q(\alpha) = Q\left(-\frac{1}{4}\right) = -2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} + 4 = -2\times\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 4 = -\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{32}{8} = \frac{33}{8}.$$

Donc Q $(x) = -2\left(x + \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{33}{8}$ (forme canonique).

Puisque $a = -2 < 0$, la parabole représentant P est dirigée vers le bas. Donc :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
Q (x)	$-\infty$ ↗	$\frac{33}{8}$	↘ $-\infty$

3. R $(x) = (x-1)^2 - 2\left(x + \frac{1}{2}\right) = x^2 - 2x + 1 - 2x - 1 = x^2 - 4x$ (forme réduite).

On calcule $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2} = 2$ puis $\beta = R(\alpha) = R(2) = 2^2 - 4\times 2 = -4$.

Donc R $(x) = (x-2)^2 - 4$ (forme canonique).

Puisque $a = 1 > 0$, la parabole représentant P est dirigée vers le haut. Donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
R (x)	$+\infty$ ↘	-4	↗ $+\infty$

4. $S(x) = 1 - 2x - 3x^2 = -3x^2 - 2x + 1$ (forme réduite).

On calcule $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2}{2\times(-3)} = -\dfrac{1}{3}$ puis

$$\beta = S(\alpha) = S\left(-\frac{1}{3}\right) = -3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 2\times\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = -3\times\frac{1}{9} + \frac{2}{3} + 1 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3} = \frac{4}{3}.$$

Donc $S(x) = -3\left(x + \dfrac{1}{3}\right)^2 + \dfrac{4}{3}$ (forme canonique).

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$S(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{4}{3}$	↘	$-\infty$

Exercice 9. Parabole et fonction.

$P(x) = -\dfrac{1}{4}(x+1)^2 + 2$ a pour courbe représentative une parabole de sommet S (– 1 ; 2).

Donc c'est la courbe $\mathscr{C}_2$.

$Q(x) = -2(x-1)^2 + 3$ a pour courbe représentative une parabole de sommet S (1 ; 3).

Donc c'est la courbe $\mathscr{C}_3$.

$R(x) = \dfrac{1}{2}(x-4)^2 + 2$ a pour courbe représentative une parabole de sommet S (4 ; 2).

Donc c'est la courbe $\mathscr{C}_1$.

$S(x) = 2(x-2)^2 - 1$ a pour courbe représentative une parabole de sommet S (2 ; – 1).

Donc c'est la courbe $\mathscr{C}_5$.

$T(x) = -(x+3)^2 - 1$ a pour courbe représentative une parabole de sommet S (– 3 ; – 1).

Donc c'est la courbe $\mathscr{C}_6$.

$U(x) = \dfrac{1}{3}(x-3)^2 - 2$ a pour courbe représentative une parabole de sommet S (3 ; – 2).

Donc c'est la courbe $\mathscr{C}_4$.

Exercice 10. Faisons le tableau de variation de chacune des fonctions polynômes définies sur **R**.

1. $P(x) = 2(x+1)^2 - 1$ a pour courbe représentative une parabole de sommet S (– 1 ; – 1) dirigée vers le haut car $a = 2 > 0$. On a donc le tableau :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$P(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

2. $Q(x) = (x-1)^2 - \frac{1}{2}$ a pour courbe représentative une parabole de sommet S (1 ; $-\frac{1}{2}$) dirigée vers le haut car $a = 1 > 0$. On a donc le tableau :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$Q(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

3. $R(x) = -\frac{1}{2}(x+5)^2 + 100$ a pour courbe représentative une parabole de sommet S (– 5 ; 100) dirigée vers le bas car $a = -\frac{1}{2} < 0$. On a donc le tableau :

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$R(x)$	$-\infty$	↗	100	↘	$-\infty$

4. $S(x) = 0{,}01(x+60)^2 + 350$ a pour courbe représentative une parabole de sommet S (– 60 ; 350) dirigée vers le haut car $a = 0{,}01 > 0$. On a donc le tableau :

x	$-\infty$		-60		$+\infty$
$S(x)$	$+\infty$	↘	350	↗	$+\infty$

5. $T(x) = 7(4-x)^2 + 11$ a pour courbe représentative une parabole de sommet S (4 ; 11) dirigée vers le haut car $a = 7 > 0$. On a donc le tableau :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$T(x)$	$+\infty$	↘	11	↗	$+\infty$

6. $U(x) = -3(x-0{,}1)^2$ a pour courbe représentative une parabole de sommet S (0,1 ; 0) dirigée vers le bas car $a = -3 < 0$. On a donc le tableau :

x	$-\infty$		$0{,}1$		$+\infty$
$U(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

Équations du second degré.

Exercice 11. Résoudre les équations suivantes à l'aide du discriminant.

1. $x^2 - 5x + 3 = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 25 - 12 = 13$.

L'équation a donc deux solutions $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$.

2. $x^2 + x = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5$.

L'équation a donc deux solutions $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

3. $x(x+6) = 8 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 8 = 0$. On calcule le discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 36 + 32 = 68$. L'équation a donc deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6-\sqrt{68}}{2} = -3-\sqrt{17}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6+\sqrt{68}}{2} = -3+\sqrt{17}$.

4. $4x^2 = 12x + 7 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x - 7 = 0$. On calcule le discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 4 \times (-7) = 256$. L'équation a donc deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{12-\sqrt{256}}{8} = \dfrac{12-16}{8} = -\dfrac{4}{8} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{12+\sqrt{256}}{8} = \dfrac{12+16}{8} = \dfrac{28}{8} = \dfrac{7}{2}$.

5. $10x^2 + 29x - 3 = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 29^2 - 4 \times 10 \times (-3) = 961$.

L'équation a donc deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-29-\sqrt{961}}{20} = \dfrac{-29-31}{20} = -\dfrac{60}{20} = -3$,

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-29+\sqrt{961}}{20} = \dfrac{-29+31}{20} = \dfrac{2}{20} = 0{,}1$.

6. $6x^2 - 11x - 7 = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4 \times 6 \times (-7) = 121 + 168 = 289$.

L'équation a donc deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{11-\sqrt{289}}{12} = \dfrac{11-17}{12} = -\dfrac{-6}{12} = -\dfrac{1}{2}$,

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{11+\sqrt{289}}{12} = \dfrac{11+17}{12} = -\dfrac{28}{12} = \dfrac{7}{3}$.

7. $2x^2 + 4x + 5 = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 2 \times 5 = 16 - 40 = -24$.
L'équation n'a donc pas de solution.
8. $9x^2 - 42x + 49 = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-42)^2 - 4 \times 9 \times 49 = 1764 - 1764 = 0$.

L'équation a donc une solution $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-42}{2\times 9} = \dfrac{42}{18} = \dfrac{7}{3}$.

Exercice 12. Résolvons chaque équation après avoir deviné une solution évidente.
1. $3x^2 - 7x + 4 = 0$ a solution évidente $x = 1$ car $3 \times 1^2 - 7 \times 1 + 4 = 3 - 7 + 4 = 0$.
Comme le produit des racines est $\frac{4}{3}$, alors l'autre solution est $\frac{4}{3}$.

2. $\dfrac{x^2}{4} - x + 1 = 0$ a pour solution évidente $x = 2$ car $\dfrac{2^2}{4} - 2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$.

Comme le produit des racines est 1, alors l'autre solution est $\frac{1}{2}$.
3. $-7x^2 - 6x + 1 = 0$ a pour solution évidente $x = -1$ car $-7 \times (-1)^2 - 6 \times (-1) + 1 = -7 + 6 + 1 = 0$.
Comme le produit des solutions est $-\frac{1}{7}$, alors l'autre solution est $\frac{1}{7}$.

Exercice 13. Déterminons, s'ils existent, deux réels u et v connaissant leur somme S et leur produit P.
1. S = 1 et P = 1. S'ils existent, u et v sont solutions de l'équation $x^2 - x + 1 = 0$.
On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$. Donc cette équation n'a pas de solution et il n'existe pas deux nombres u et v tels que leur somme vaut 1 et leur produit 1.
2. S = 10 et P = 20,5. S'ils existent, u et v sont solutions de l'équation $x^2 - 10x + 20{,}5 = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 20{,}5 = 100 - 82 = 18$. Donc l'équation a deux solutions $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{10-\sqrt{18}}{2} = \dfrac{10-3\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{10+\sqrt{18}}{2} = \dfrac{10+3\sqrt{2}}{2}$.

Donc $u = \dfrac{10-3\sqrt{2}}{2}$ et $v = \dfrac{10+3\sqrt{2}}{2}$ (ou le contraire) sont les deux nombres dont la somme est 10 est le produit 20,5
3. S = – 6 et P = 9. S'ils existent, u et v sont solutions de l'équation $x^2 + 6x + 9 = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 1 \times 9 = 36 - 36 = 0$. L'équation a donc une unique solution $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{6}{2} = -3$.

Donc les nombres $u = -3$ et $v = -3$ sont les deux nombres dont la somme vaut – 6 et le produit 9.

Factorisation d'expression du second degré.

Exercice 14. Cherchons les racines éventuelles à l'aide du discriminant puis nous en déduirons une factorisation de chaque polynôme dans le cas où cela est possible.

1. $6x^2 + x - 2$. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 6 \times (-2) = 1 + 48 = 49$.

L'équation $6x^2 + x - 2 = 0$ a donc deux solutions $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-\sqrt{49}}{12} = \dfrac{-1-7}{12} = -\dfrac{8}{12} = -\dfrac{2}{3}$,

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{49}}{12} = \frac{-1+7}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit la factorisation $6x^2 + x - 2 = 6\left(x+\dfrac{2}{3}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$.

2. $x^2 + 2x - 3$. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$.

L'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$ a donc deux solutions $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2-\sqrt{16}}{2} = \dfrac{-2-4}{2} = -\dfrac{6}{2} = -3$,

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{16}}{2} = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

On en déduit la factorisation $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$.

3. $2x^2 + 10x + 12$. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \times 2 \times 12 = 100 - 96 = 4$.

L'équation $2x^2 + 10x + 12 = 0$ a donc deux solutions $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-10-\sqrt{4}}{4} = \dfrac{-10-2}{4} = -\dfrac{12}{4} = -3$,

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10+\sqrt{4}}{4} = \frac{-10+2}{4} = -\frac{8}{4} = -2.$$

On en déduit la factorisation $2x^2 + 10x + 12 = 2(x+3)(x+2)$.

4. $-2x^2 + 5x - 2$. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times (-2) \times (-2) = 25 - 16 = 9$.

L'équation $-2x^2 + 5x - 2 = 0$ a donc deux solutions $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5-\sqrt{9}}{-4} = \dfrac{-5-3}{-4} = \dfrac{8}{4} = 2$,

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+\sqrt{9}}{-4} = \frac{-5+3}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit la factorisation $-2x^2 + 5x - 2 = -2(x-2)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$.

5. $-3x^2 + 2x - 1$. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-3) \times (-1) = 4 - 12 = -9$.
Donc l'équation $-3x^2 + 2x - 1 = 0$ n'a pas de solution et l'expression $-3x^2 + 2x - 1$ ne se factorise pas (comme produit de termes du premier degré).

6. $x^2 + 6x - 7$. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 36 + 28 = 64$.

L'équation $x^2 + 6x - 7 = 0$ a donc deux solutions $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6-\sqrt{64}}{2} = \dfrac{-6-8}{2} = \dfrac{-14}{2} = -7$,

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+\sqrt{64}}{2} = \frac{-6+8}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

On en déduit la factorisation $x^2 + 6x - 7 = (x+7)(x-1)$.

7. $-4x^2-3x+1$. On calcule le discriminant $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times(-4)\times 1=9+16=25$.

L'équation $-4x^2-3x+1=0$ a donc deux solutions $\quad x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{3-\sqrt{25}}{-8}=\dfrac{3-5}{-8}=\dfrac{-2}{-8}=\dfrac{1}{4}$,

$$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{3+\sqrt{25}}{-8}=\dfrac{3+5}{-8}=\dfrac{8}{-8}=-1.$$

On en déduit la factorisation $-4x^2-3x+1=-4\left(x-\dfrac{1}{4}\right)(x+1)$.

8. $3x^2+8x-3$. On calcule le discriminant $\Delta=b^2-4ac=8^2-4\times 3\times(-3)=64+36=100$.

L'équation $3x^2+8x-3=0$ a donc deux solutions $\quad x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-8-\sqrt{100}}{6}=\dfrac{-8-10}{6}=\dfrac{-18}{6}=-3$,

$$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-8+\sqrt{100}}{6}=\dfrac{-8+10}{6}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}.$$

On en déduit la factorisation $3x^2+8x-3=3(x+3)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$.

9. $6x^2+2x+1$. On calcule le discriminant $\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times 6\times 1=4-24=-20$.
Donc l'équation $6x^2+2x+1=0$ n'a pas de solution et l'expression $6x^2+2x+1$ ne se factorise pas (comme produit de termes du premier degré).

10. $-3x^2+2x+1$. On calcule le discriminant $\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times(-3)\times 1=4+12=16$.

L'équation $-3x^2+2x+1=0$ a donc deux solutions $\quad x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2-\sqrt{16}}{-6}=\dfrac{-2-4}{-6}=\dfrac{6}{6}=1$,

$$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2+\sqrt{16}}{-6}=\dfrac{-2+4}{-6}=-\dfrac{2}{6}=-\dfrac{1}{3}.$$

On en déduit la factorisation $-3x^2+2x+1=-3(x-1)\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$.

Exercice 15.

$A(x)=2x^2+4x-30$ On calcule le discriminant $\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times 2\times(-30)=16+240=256$.
Remarquons que $\sqrt{\Delta}=16$. L'équation $2x^2+4x-30=0$ a donc deux solutions, données par les formules :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-4-16}{4}=\dfrac{-20}{4}=-5 \qquad x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-4+16}{4}=\dfrac{12}{4}=3.$

On peut ensuite factoriser $A(x)=2(x+5)(x-3)$. On fait ensuite le tableau de signes :

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$B(x) = -3x^2 - x + 4$ On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times (-3) \times 4 = 1 + 48 = 49$.
Remarquons que $\sqrt{\Delta} = 7$. L'équation $-3x^2 - x + 4 = 0$ a donc deux solutions, données par les formules :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1-7}{-6} = \dfrac{-6}{-6} = 1$ $\qquad$ $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+7}{-6} = \dfrac{-8}{6} = \dfrac{-4}{3}$.

On peut ensuite factoriser $B(x) = -3(x-1)\left(x + \dfrac{4}{3}\right)$. On fait ensuite le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		1		$+\infty$
-3		$-$		$-$		$-$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\frac{4}{3}$		$-$	0	$+$		$+$	
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$C(x) = -2x^2 + 9x - 4$ On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \times (-2) \times (-4) = 81 - 32 = 49$.
Remarquons que $\sqrt{\Delta} = 7$. L'équation $-2x^2 + 9x - 4 = 0$ a donc deux solutions, données par les formules :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-9-7}{-4} = \dfrac{-16}{-4} = 4$ $\qquad$ $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-9+7}{-4} = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2}$.

On peut ensuite factoriser $C(x) = -2(x-4)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$. On fait ensuite le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-\frac{1}{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
$C(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$D(x) = 5x^2 - 2x$ Il n'est pas utile de calculer le discriminant car $D(x) = 5x^2 - 2x = x(5x-2)$.
On sait alors que le discriminant est positif car l'équation $x(5x-2) = 0$ a deux solutions. En effet, un produit est nul lorsque l'un des facteurs est nul, donc $x = 0$ ou $5x - 2 = 0$, puis $x_1 = 0$ ou $x_2 = \dfrac{2}{5}$.

Nous pouvons alors faire le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$5x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$D(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 16. Résolvons les inéquations suivantes en utilisant un tableau de signes si nécessaire.

1. $3x-1+\dfrac{5}{1-x}<0 \Leftrightarrow \dfrac{(3x-1)(1-x)}{1-x}+\dfrac{5}{1-x}<0 \Leftrightarrow \dfrac{(3x-1)(1-x)+5}{1-x}<0 \Leftrightarrow \dfrac{3x-3x^2-1+x+5}{1-x}<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-3x^2+4x+4}{1-x}<0$.

Recherche des zéros, on résout $-3x^2+4x+4=0$. On calcule le discriminant :

$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times(-3)\times4=16+48=64$. Donc l'équation a deux solutions :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-4-8}{-6}=\dfrac{-12}{-6}=2$ $\qquad$ $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-4+8}{-6}=-\dfrac{4}{6}=-\dfrac{2}{3}$.

Recherche des valeurs interdites, on résout $1-x=0$, soit $x=1$ (seule valeur interdite).
Puisque $-3x^2+4x+4$ a pour courbe représentative une parabole dirigée vers le bas, on a le tableau :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		1		2		$+\infty$
$-3x^2+4x+4$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\dfrac{-3x^2+4x+4}{1-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc $\dfrac{-3x^2+4x+4}{1-x}<0$ a pour solution l'ensemble S = $\left]-\infty\,;-\dfrac{2}{3}\right[\cup\left]1\,;2\right[$.

2. $x+1-\dfrac{x}{2x+1}>0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)(2x+1)}{2x+1}-\dfrac{x}{2x+1}>0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)(2x+1)-x}{2x+1}>0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^2+x+2x+1-x}{2x+1}>0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2+2x+1}{2x+1}>0$.

Recherche des zéros, on résout $2x^2+2x+1=0$. On calcule le discriminant :

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times2\times1=4-8=-4$. Donc il n'y a pas de zéros.

On en déduit que $2x^2+2x+1$ est toujours positif (car sa courbe est une parabole dirigée vers le haut qui ne coupe pas l'axe des abscisses).

Recherche des valeurs interdites, on résout $2x+1=0$, soit $2x=-1$ d'où $x=-\dfrac{1}{2}$ (seule valeur interdite).

D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x^2+2x+1$		$+$		$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{2x^2+2x+1}{2x+1}$		$-$	$\Vert$	$+$	

Donc $\dfrac{2x^2+2x+1}{2x+1}>0$ a pour solution l'ensemble S = $\left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

3. $4-\dfrac{1}{(x-2)^2}\leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{4(x-2)^2}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{(x-2)^2}\leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{4(x-2)^2-1}{(x-2)^2}\leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{[2(x-2)-1][2(x-2)+1]}{(x-2)^2}\leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(2x-5)(2x-3)}{(x-2)^2}\leq 0$.

Recherche des zéros, on résout $(2x-5)(2x-3)=0$. Un produit est nul lorsque l'un des facteurs est nul.
Donc $2x-5=0$ ou $2x-3=0$, soit $2x=5$ ou $2x=3$, d'où $x=2{,}5$ ou $x=1{,}5$.
Recherche des valeurs interdites, on résout $(x-2)^2=0$, soit $x-2=0$ puis $x=2$ (seule valeur interdite).
On obtient ensuite le tableau suivant :

x	$-\infty$		1,5		2		2,5		$+\infty$
$2x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x-3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(x-2)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{(2x-5)(2x-3)}{(x-2)^2}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc $\dfrac{(2x-5)(2x-3)}{(x-2)^2}\leq 0$ a pour ensemble solution $S=[1{,}5\,;2[\,\cup\,]2\,;2{,}5]$.

4. $-2-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{6}{3-x}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2(x-1)(3-x)}{(x-1)(3-x)}-\dfrac{(3-x)}{(x-1)(3-x)}+\dfrac{6(x-1)}{(x-1)(3-x)}\geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2(x-1)(3-x)-(3-x)+6(x-1)}{(x-1)(3-x)}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2(3x-x^2-3+x)-3+x+6x-6}{(x-1)(3-x)}\geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^2-8x+6-3+x+6x-6}{(x-1)(3-x)}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-x-3}{(x-1)(3-x)}\geq 0$.

Recherche des zéros, on résout $2x^2-x-3=0$. On calcule le discriminant :
$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times 2\times(-3)=1+24=25$. L'équation a donc deux solutions :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{1+\sqrt{25}}{4}=\dfrac{1+5}{4}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$ $\quad x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{1-\sqrt{25}}{4}=\dfrac{1-5}{4}=-\dfrac{4}{4}=-1$.

Recherche des valeurs interdites, on résout $(x-1)(3-x)=0$. Un produit est nul lorsque l'un des facteurs est nul. Donc $x-1=0$ ou $3-x=0$ puis $x=1$ ou $x=3$ (deux valeurs interdites).
On peut ensuite faire le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		1		1,5		3		$+\infty$
$2x^2-x-3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{(2x-5)(2x-3)}{(x-2)^2}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

On en déduit que l'ensemble des solutions de $\dfrac{2x^2-x-3}{(x-1)(3-x)}\geq 0$ est $S=[-1\,;1[\,\cup\,[1{,}5\,;3[$.