EQUATIONS AVEC VALEURS ABSOLUES

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$|x-2|=3$ $\quad |x+5|=12$ $\quad |3-x|=5$ $\quad |x-5|=-2$ $\quad |2x-4|=|x+1|$ $\quad |2x+3|-|2-x|=-3$

CORRECTION

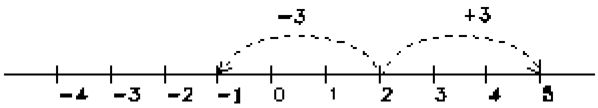
Pour résoudre des équations faisant intervenir des valeurs absolues, deux méthodes sont possibles :

1ère méthode : Distinguer plusieurs cas (on appelle cela une DISJONCTION DES CAS), pour « enlever » les valeurs absolues, puisque, par définition , $|a|=a$ ou $-a$, selon que $a\geq 0$ ou $a\leq 0$

2ème méthode :

Interpréter les valeurs absolues en termes de distances. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle n'est plus efficace si plusieurs valeurs absolues interviennent. Enfin, ne pas oublier que $|a|=|b| \Leftrightarrow a=b$ ou $a=-b$

Equation $|x-2|=3$

En termes de distances	**En utilisant les propriétés de la valeur absolue**
Puisque $|x-2|=d(x;2)$, on cherche les nombres x tels que $d(x;2)=3$. On trouve $x=2+3=5$ et $x=2-3=-1$  S={−1; 5}	Puisque seuls 3 et –3 ont des valeurs absolues égales à 3, on a l'équivalence : $|x-2|=3 \Leftrightarrow x-2=3$ ou $x-2=-3$ $\Leftrightarrow x=2+3=5$ ou $x=2-3=-1$ Par suite : S = {– 1; 5}

Autres équations

$|x+5|=12$	$|x+5|=12 \Leftrightarrow |x-(-5)|=12 \Leftrightarrow d(-5;x)=12$ $\Leftrightarrow x=-5-12=-17$ ou $x=-5+12=7$ $S=\{-17;7\}$	L'astuce d'écriture $+5=-(-5)$ est souvent utilisée pour interpréter les additions en termes de distance.
$|3-x|=5$	$|3-x|=5 \Leftrightarrow d(x;3)=5 \Leftrightarrow d(3;x)=5$ $\Leftrightarrow x=3+5=8$ ou $x=3-5=-2$. $S=\{-2;8\}$	Cette résolution repose sur l'égalité $d(x;3)=d(3;x)$
$|x-5|=-2$	Puisque pour tout réel x , $|x-5|\geq 0$, l'équation n'admet pas de solution réelle. $S=\varnothing$	
$|2x-4|=|x+1|$	$|2x-4|=|x+1| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4=x+1 \text{ ou} \\ 2x-4=-(x+1)=-x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \text{ ou} \\ 3x=3 \Leftrightarrow x=1 \end{cases}$ $\quad S=\{1;5\}$	

$|2x+3|-|2-x|=-3$

Etude simultanée des signes de $2x+3$ et de $2-x$ $\longrightarrow$

Il faut donc étudier l'expression $|2x+3|-|2-x|$ et résoudre l'équation sur **trois intervalles différents :**

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	

Si $x\in\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$, $2x+3\leq 0$ donc $|2x+3|=-(2x+3)=-2x-3$, et $2-x\geq 0$ donc $|2-x|=2-x$. L'équation $|2x+3|-|2-x|=-3$ est donc équivalente à $|2x+3|-|2-x|=-3 \Leftrightarrow -2x-3-(2-x)=-3 \Leftrightarrow -x-5=-3$

$\Leftrightarrow -x=2 \Leftrightarrow x=-2$. Comme $-2\in\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$, cette solution est acceptable

Si $x\in\left[-\frac{3}{2};2\right]$, $2x+3\geq 0$ donc $|2x+3|=2x+3$, et $2-x\geq 0$ donc $|2-x|=2-x$. L'équation $|2x+3|-|2-x|=-3$ est donc équivalente à $|2x+3|-|2-x|=-3 \Leftrightarrow 2x+3-(2-x)=-3 \Leftrightarrow 3x+1=-3$

$\Leftrightarrow 3x=-4 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{3}$. Comme $-\frac{4}{3}\in\left[-\frac{3}{2};2\right]$, cette solution est acceptable.

Si $x\in[2;+\infty[$, $2x+3\geq 0$ donc $|2x+3|=2x+3$, et $2-x\leq 0$ donc $|2-x|=-(2-x)=-2+x=x-2$. L'équation $|2x+3|-|2-x|=-3$ est donc équivalente à $|2x+3|-|2-x|=-3 \Leftrightarrow 2x+3-(x-2)=-3 \Leftrightarrow x+5=-3 \Leftrightarrow x=-8$

Comme $-8\notin[2;+\infty[$, cette solution est à exclure. Finalement, $S=\left\{-2;-\frac{4}{3}\right\}$