

Exercice ① :

www.physique-maths.com

a) $x^2 + 3x + 2 = (x+2) \cdot (x+1) = 0$ Donc $x = -1$ et $x = -2$ sont les deux solutions : $S = \{-2; -1\}$

b) $x^2 + 4x + 3 = (x+3) \cdot (x+1) = 0$ Donc $x = -1$ et $x = -3$ sont les deux solutions : $S = \{-3; -1\}$

c) $x^2 + 8x + 5 = 0$; $a = 1$; $b = 8$; $c = 5$; $\Delta = 8^2 - 4 \cdot 5 = 44$; $x = \frac{-8 \pm \sqrt{44}}{2} = -4 \pm \sqrt{11}$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{44}}{2} = \frac{-8}{2} \pm \frac{2 \cdot \sqrt{11}}{2} = -4 \pm \sqrt{11}. \quad S = \left\{ -4 - \sqrt{11}; -4 + \sqrt{11} \right\}$$

d) $x^2 - x - 1 = 0$; $a = 1$; $b = -1$; $c = -1$; $\Delta = 1^2 + 4 = 5$; $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. $S = \left\{ \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$

e) $x^2 + 7x + 3 = 0$; $a = 1$; $b = 7$; $c = 3$; $\Delta = 7^2 - 4 \cdot 3 = 37$.

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{37}}{2}. \quad S = \left\{ \frac{-7 - \sqrt{37}}{2}; \frac{-7 + \sqrt{37}}{2} \right\}$$

f) $x^2 - 4x + 6 = 0$; $a = 1$; $b = -4$; $c = 6$; $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 6 = -8 < 0$ donc il n'y a pas de solution. $S = \emptyset$

g) $2x^2 + 5x + 1 = 0$; $a = 2$; $b = 5$; $c = 1$; $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 = 17$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{4}. \quad S = \left\{ \frac{-5 - \sqrt{17}}{4}; \frac{-5 + \sqrt{17}}{4} \right\}$$

h) $2x^2 - 5x + 3 = 0$; $a = 2$; $b = -5$; $c = 3$; $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{4}. \quad ; \quad S = \left\{ \frac{5-1}{4}; \frac{5+1}{4} \right\} = \left\{ \frac{4}{4}; \frac{6}{4} \right\} ; \quad S = \{1; 1,5\}$$

On aurait aussi pu factoriser : $2x^2 - 5x + 3 = (2x-3) \cdot (x-1)$.

i) $2x^2 + 4x + 1 = 0$; $a = 2$; $b = 4$; $c = 1$; $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 2 = 8$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{-4}{4} \pm \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{4} = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad S = \left\{ -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}; -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

j) $3x^2 + 5x + 1 = 0$; $a = 3$; $b = 5$; $c = 1$; $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 3 = 13$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}. \quad S = \left\{ \frac{-5 - \sqrt{13}}{6}; \frac{-5 + \sqrt{13}}{6} \right\}$$

k) $10x^2 + 7x - 1 = 0$; $a = 10$; $b = 7$; $c = -1$; $\Delta = 7^2 + 4 \cdot 10 = 89$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{89}}{20}. \quad S = \left\{ \frac{-7 - \sqrt{89}}{20}; \frac{-7 + \sqrt{89}}{20} \right\}$$

l) $12x^2 - 11x + 5 = 0$; $a = 12$; $b = -11$; $c = 5$; $\Delta = 11^2 - 4 \cdot 12 \cdot 5 = -119 < 0$

donc il n'y a pas de solution : $S = \emptyset$

m) $30x^2 + 23x + 4 = 0$; $\Delta = 23^2 - 4 \cdot 30 \cdot 4 = 49$

$$x = \frac{-23 \pm \sqrt{49}}{60} = \frac{-23 \pm 7}{60} = \begin{matrix} / & -\frac{1}{2} \\ \backslash & -\frac{4}{15} \end{matrix}. \quad S = \left\{ -\frac{1}{2}; -\frac{4}{15} \right\}$$

On aurait aussi pu factoriser : $30x^2 + 23x + 4 = (15x+4) \cdot (2x+1)$. En 2^{ème} année, vous verrez comment trouver une telle factorisation, même pour des polynômes de degré supérieur à 2. Pour ces polynômes, les formules de Viète ne sont pas applicables !

Exercice ② :

a) $x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0$ Le membre de gauche a été factorisé dans l'exercice 1.h de la série 5.
 $x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = x^4 - 1 - 2x \cdot (x^2 - 1) = (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1) - 2x \cdot (x^2 - 1) = (x^2 + 1 - 2x) \cdot (x^2 - 1) =$
 $= (x - 1)^2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) = (x - 1)^3 \cdot (x + 1)$

Cette expression s'annule pour $x = 1$, pour $x = -1$ et pour aucune autre valeur.

$$\underline{\underline{S = \{-1; 1\}}}$$

b) $2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = 0$ Le membre de gauche a été factorisé dans l'exercice 1.j de la série 5.
 $2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = x^2 \cdot (2x - 3) - 4 \cdot (2x - 3) = (x^2 - 4) \cdot (2x - 3) = (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (2x - 3)$

Cette expression s'annule pour $x = -2$, pour $x = 2$, pour $x = 1,5$ et pour aucune autre valeur.

$$\underline{\underline{S = \{-2; 1,5; 2\}}}$$

c) $(x - 1)^4 - 4 \cdot (x - 1)^2 = 0$ Le membre de gauche a été factorisé dans l'exercice 1.c de la série 5.
 $(x - 1)^4 - 4 \cdot (x - 1)^2 = (x - 1)^2 \cdot ((x - 1)^2 - 4) = (x - 1)^2 \cdot (x^2 - 2x + 1 - 4) =$
 $= (x - 1)^2 \cdot (x^2 - 2x - 3) = (x - 1)^2 \cdot (x - 3) \cdot (x + 1)$

Cette expression s'annule pour $x = -1$, pour $x = 1$, pour $x = 3$ et pour aucune autre valeur.

$$\underline{\underline{S = \{-1; 1; 3\}}}$$

d) $x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ Le membre de gauche a été factorisé dans l'exercice 1.t de la série 5.
 $x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1 = (x^2 + x + 1) \cdot (x^3 - 1) = (x^2 + x + 1)^2 \cdot (x - 1)$

$x^2 + x + 1$ ne s'annule jamais, car son discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$ est négatif.

L'expression $x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$ s'annule pour $x = 1$ et pour aucune autre valeur.

$$\underline{\underline{S = \{1\}}}$$

e) $x^3 - 1 + x^2 - x = 0$ Le membre de gauche a été factorisé dans l'exercice 1.f de la série 5.
 $x^3 - 1 + x^2 - x = x^2 \cdot (x + 1) - (x + 1) = (x + 1) \cdot (x^2 - 1) = (x + 1)^2 \cdot (x - 1)$

Cette expression s'annule pour $x = -1$, pour $x = 1$ et pour aucune autre valeur.

$$\underline{\underline{S = \{-1; 1\}}}$$

f) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ C'est une équation appelée bicarrée car elle s'écrit : $(x^2)^2 - 3(x^2) + 2 = 0$

Par factorisation : $x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2 - 2) \cdot (x^2 - 1) = (x - \sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$

Cette expression s'annule en exactement 4 valeurs.

$$\underline{\underline{S = \{-\sqrt{2}; -1; 1; \sqrt{2}\}}}$$

g) $2x^4 - 5x^2 + 3 = 0$ C'est une autre équation bicarrée.

Par factorisation : $2x^4 - 5x^2 + 3 = (2x^2 - 3) \cdot (x^2 - 1) = (\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} \cdot x + \sqrt{3}) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$

Cette expression s'annule en exactement 4 valeurs.

$$\underline{\underline{S = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}; -1; 1; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right\}}} \quad \text{On préfère écrire : } \underline{\underline{S = \left\{ -\frac{\sqrt{6}}{2}; -1; 1; \frac{\sqrt{6}}{2} \right\}}}$$

h) $2x^4 + x^2 - 3 = 0$ C'est une autre équation bicarrée.

Par factorisation : $2x^4 + x^2 - 3 = (2x^2 + 3) \cdot (x^2 - 1) = (2x^2 + 3) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$

Le facteur $(2x^2 + 3)$ ne s'annule jamais.

Cette expression s'annule en exactement 2 valeurs.

$$\underline{\underline{S = \{-1; 1\}}}$$

i) $2x^4 + 7x^2 - 15 = 0$ C'est une autre équation bicarrée.

Par factorisation : $2x^4 + 7x^2 - 15 = (2x^2 - 3) \cdot (x^2 + 5) = (\sqrt{2} \cdot x + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{3}) \cdot (x^2 + 5)$

Le facteur $(x^2 + 5)$ ne s'annule jamais.

Cette expression s'annule en exactement 2 valeurs.

$$\underline{\underline{S = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right\}}} \quad \text{On préfère écrire : } \underline{\underline{S = \left\{ -\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2} \right\}}}$$

j) $2x^4 + 6x^2 + 5 = 0$ C'est une autre équation bicarrée.

En posant $y = x^2$, on obtient l'équation du second degré : $2y^2 + 6y + 5 = 0$.

$$a = 2 ; b = 6 ; c = 5 ; \Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 36 - 40 = -4$$

Le discriminant Δ étant négatif, cette équation n'a pas de solution dans \mathbb{R} . $\underline{\underline{S = \emptyset}}$

k) $8x^6 + 65x^3 + 8 = 0$ C'est une équation similaire à une bicarrée.

En posant $y = x^3$, on obtient l'équation du second degré : $8y^2 + 65y + 8 = 0$.

$$a = 8 ; b = 65 ; c = 8 ; \Delta = b^2 - 4ac = 65^2 - 4 \cdot 8 \cdot 8 = 4225 - 256 = 3969 = 63^2$$

L'équation en y possède deux solutions : $y_1 = \frac{-65 - 63}{16} = -8$ et $y_2 = \frac{-65 + 63}{16} = -\frac{1}{8}$

Donc l'équation en x possède les deux solutions :

$$x_1 = \sqrt[3]{y_1} = \sqrt[3]{-8} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \sqrt[3]{y_2} = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$$

l'équation possède exactement 2 solutions : $\underline{\underline{S = \left\{ -2; -\frac{1}{2} \right\}}}$

l) $\sqrt{x^2 + 6} = \sqrt{5 \cdot x}$ Pour éliminer les racines, élevons au carré les deux membres de l'équation.

$$x^2 + 6 = 5 \cdot x \Rightarrow x^2 - 5 \cdot x + 6 = 0 \Rightarrow (x - 2) \cdot (x - 3) = 0$$

On trouve deux solutions. Il faut **vérifier** qu'elles satisfont l'équation de départ ! : $\underline{\underline{S = \{ 2; 3 \}}}$

m) $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{2x^2 - 4x + 1}$ Pour éliminer les racines, élevons les deux membres au carré.

$$x^2 - 2 = 2x^2 - 4x + 1 \Rightarrow 0 = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow (x - 3) \cdot (x - 1) = 0$$

On trouve deux solutions : $x = 1$ et $x = 3$.

En **vérifiant** pour $x = 1$, on trouve : $\sqrt{1^2 - 2} = \sqrt{2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 1} \Rightarrow \sqrt{-1} = \sqrt{-1}$.

$\sqrt{-1}$ n'étant pas un nombre réel, cette solution n'est pas acceptable.

La seule la solution acceptable est $x = 3$, qui donne : $\sqrt{3^2 - 2} = \sqrt{2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 1} \Rightarrow \sqrt{7} = \sqrt{7}$.

Il n'y a donc qu'une seule solution : $\underline{\underline{S = \{ 3 \}}}$

n) $\sqrt{x \cdot (x-3)} = \sqrt{8x-x^2}$ Pour éliminer les racines, élevons au carré les deux membres.
 $x \cdot (x-3) = 8x-x^2 \Rightarrow x \cdot (x-3) + x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x \cdot (x-3) + x \cdot (x-8) = 0 \Rightarrow x \cdot (2x-11) = 0$
 On trouve deux solutions : $x = 0$ et $x = \frac{11}{2} = 5,5$.

Il faut **vérifier** qu'elles satisfont l'équation de départ ! : $S = \{ 0 ; 5,5 \}$

o) $2 + \sqrt{2x+4} = x \Leftrightarrow \sqrt{2x+4} = x-2$ Pour éliminer le racine, élevons au carré les deux membres.
 $2x+4 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow 0 = x^2 - 6x \Rightarrow x \cdot (x-6) = 0$
 On trouve deux solutions : $x = 0$ et $x = 6$.

En **vérifiant** pour $x = 0$, on trouve : $\sqrt{2 \cdot 0 + 4} = 0 - 2 \Rightarrow 2 = -2$, l'égalité est fausse !

En élevant au carré on perd le signe des deux membres, ce qui introduit des solutions supplémentaires.

La seule la solution acceptable est $x = 6$, qui donne : $\sqrt{2 \cdot 6 + 4} = 6 - 2 \Rightarrow \sqrt{16} = 4$.

Il n'y a donc qu'une seule solution : $S = \{ 6 \}$

p) $x + \sqrt{x+5} = 7 \Leftrightarrow \sqrt{x+5} = 7-x$ Pour éliminer le racine, élevons au carré les deux membres.
 $x+5 = x^2 - 14x + 49 \Rightarrow 0 = x^2 - 15x + 44 \Rightarrow (x-11) \cdot (x-4) = 0$
 On trouve deux solutions : $x = 4$ et $x = 11$.

En **vérifiant** pour $x = 11$, on trouve : $\sqrt{11+5} = 7-11 \Rightarrow 4 = -4$, l'égalité est fausse !

En élevant au carré on perd le signe des deux membres, ce qui introduit des solutions supplémentaires.

La seule la solution acceptable est $x = 4$, qui donne : $\sqrt{4+5} = 7-4 \Rightarrow \sqrt{9} = 3$.

Il n'y a donc qu'une seule solution : $S = \{ 4 \}$

q) $\frac{1}{x+3} = x-3$ Multiplions les deux membres par : $(x+3)$

$$1 = (x-3) \cdot (x+3) \Leftrightarrow 1 = x^2 - 9 \Leftrightarrow x^2 = 10$$

On trouve deux solutions : $x = \sqrt{10}$ et $x = -\sqrt{10}$.

Il faut **vérifier** qu'elles satisfont l'équation de départ ! : $S = \{ -\sqrt{10} ; \sqrt{10} \}$

r) $\frac{x-3}{x-1} - \frac{x-1}{x-3} = 0$ Multiplions les deux membres par : $(x-1) \cdot (x-3)$

$$(x-3)^2 - (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 - (x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow -4x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Il faut **vérifier** que la solution satisfait l'équation de départ ! : $S = \{ 2 \}$

s) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{35}$ Multiplions les deux membres par : $35 \cdot (x-2) \cdot (x+2)$

$$35 \cdot (x+2) - 35 \cdot (x-2) = (x-2) \cdot (x+2) \Leftrightarrow 35 \cdot 4 = x^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 - 35 \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 144 = 0$$

Il faut **vérifier** que les solutions satisfait l'équation de départ ! : $S = \{ -12 ; 12 \}$

t) $\frac{x+5}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$ Multiplions les deux membres par : $(x-1) \cdot (x+1)$
 $(x+5) \cdot (x+1) - 2 \cdot (x-1) = 4 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 - 2x + 2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x+3) \cdot (x+1) = 0$
 On trouve deux solutions : $x = -1$ et $x = -3$.
 $x = -1$ n'est pas une solution, car elle fait intervenir une division par 0 !
 Il n'y a donc qu'une seule solution : $S = \{ -3 \}$

u) $\frac{x-7}{x^2-5x+6} + \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x-2} = 0$ Remarquons que $x^2 - 5x + 6$ se factorise en $(x-3) \cdot (x-2)$
 Multiplions les deux membres par : $(x-3) \cdot (x-2)$
 $x-7+2 \cdot (x-2)+(x-3)=0 \Leftrightarrow x-7+2x-4+x-3=0 \Leftrightarrow 4x-14=0 \Leftrightarrow x=\frac{7}{2}=3,5$
 Il faut **vérifier** que la solution satisfait l'équation de départ ! : $S = \{ 3,5 \}$

v) $\frac{1}{x^2+x} + \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1}$ Multiplions les deux membres par : $x \cdot (x-1) \cdot (x+1)$
 $(x-1) + x^2 \cdot (x+1) = x \cdot (x+1) \cdot (x-1) + 2x \Leftrightarrow x-1+x^3+x^2 = x^3-x+2x \Leftrightarrow$
 $x^2-1=0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot (x+1) = 0$
 On trouve deux solutions : $x = -1$ et $x = 1$.
 On voit qu'aucune des deux solutions n'est acceptable, car elles font intervenir des divisions par 0.
 L'ensemble des solutions est : $S = \emptyset$. On peut aussi noter : $S = \{ \}$

Comment des solutions non valides peuvent-elles apparaître ?

Il *semble* pourtant qu'on n'utilise que les trois règles de simplifications énoncées en VII.1.

En multipliant au point par $x \cdot (x-1) \cdot (x+1)$, on multiplie par zéro si $x = 0$, si $x = 1$ ou si $x = -1$.

Or multiplier par zéro n'est pas une règle de simplification valide et peut amener de nouvelles solutions !
 Cela peut ajouter des solutions non valides. (Cela n'enlève pas de solutions correctes).

Voici un autre exemple plus simple :

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = x \quad \text{En multipliant par } x \text{ les deux membres, on obtient : } \sqrt{x} = x^2.$$

$x = 0$ est une solution de $\sqrt{x} = x^2$, mais pas de $\frac{1}{\sqrt{x}} = x$. C'est en multipliant par x que la solution $x = 0$ est apparue.

Par contre $x = 1$ est l'unique solution correcte de l'équation.