Les inéquations

www.physique-maths.com

J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion.

Stendhal

Table des matières

1 Quelques règles sur les inégalités

1.1 Règle de l'addition et soustraction

Régle 1 :

Soients a, b et c trois réels

alors $a \leq b \Longleftrightarrow a + c \leq b + c$

et $a \leq b \Longleftrightarrow a - c \leq b - c$

Exemples :

- $2x + 4 \leq 0 \Longleftrightarrow 2x + 4 - 4 \leq 0 - 4 \Longleftrightarrow 2x \leq -4$
- $3x - 2 < -3 \Longleftrightarrow 3x - 2 + 2 < -3 + 2 \Longleftrightarrow 3x < -1$
- $\frac{1}{2}(2x - 4\sqrt{2}) > 0 \Longleftrightarrow x - 2\sqrt{2} > 0 \Longleftrightarrow x - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} > 0 + 2\sqrt{2} \Longleftrightarrow x > 2\sqrt{2}$

1.2 Règles de la multiplication et division

Régle 2 :

Soients a, b deux réels et c **un réel positif** ou nul

alors $a \leq b \Longleftrightarrow a \times c \leq b \times c$

et $a \leq b$ et $c \neq 0 \Longleftrightarrow \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$

Exemples :

- $2x > 7 \Longleftrightarrow 2x \times 3 > 7 \times 3 \Longleftrightarrow 6x > 21$
- $3x \leq 4 \Longleftrightarrow \frac{3x}{3} \leq \frac{4}{3} \Longleftrightarrow x \leq \frac{4}{3}$
- $\sqrt{2}x \geq 3 \Longleftrightarrow \sqrt{2}x \times \sqrt{2} \geq 3 \times \sqrt{2} \Longleftrightarrow 2x \geq 3\sqrt{2}$

Régle 3 :

Soients a, b deux réels et c **un réel négatif** ou nul

alors $a \leq b \Longleftrightarrow a \times c \geq b \times c$ (Changement de sens de l'inégalité)

et $a \leq b$ et $c \neq 0 \Longleftrightarrow \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$ (Changement de sens de l'inégalité)

Exemples :

- $-x > 4 \Longleftrightarrow -x \times (-1) < 4 \times (-1) \Longleftrightarrow x < -4$
- $-4x < -3 \Longleftrightarrow \frac{-4x}{-4} > \frac{-3}{-4} \Longleftrightarrow x > \frac{3}{4}$
- $-2x \geq 6 \Longleftrightarrow \frac{-2x}{-2} \leq \frac{6}{-2} \Longleftrightarrow x \leq -3$

2 Les inéquations du premier degré à une inconnue

2.1 Méthode de résolution

Méthode de résolution :

- Développer et réduire les deux membres.
- Faire apparaître les x d'un côté et le reste de l'autre.
- Trouver une équation équivalente de la forme $x \leq a$ ou $x \geq a$ ou $x < a$ ou $x > a$.
- Donner l'ensemble des solutions sous la forme d'un intervalle.

2.2 Exemples

Exemple 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :$6x + 3 > -4x - 5$

$6x + 3 > -4x - 5$
$\Leftrightarrow 6x + 4x > -5 - 3$
$\Leftrightarrow 10x > -8$
$\Leftrightarrow x > -\dfrac{8}{10}$
$\Leftrightarrow x > -\dfrac{4}{5}$ ou $x > -0,8$
donc $S = \left]-\dfrac{4}{5}; +\infty\right[$

Exemple 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :$-3(x + 5) - (2x + 3) \leq 4(x - 1) - 3(2 + x)$

$-3(x + 5) - (2x + 3) \leq 4(x - 1) - 3(2 + x)$
$\Leftrightarrow -3x - 15 - 2x - 3 \leq 4x - 4 - 6 - 3x$
$\Leftrightarrow -5x - 18 \leq x - 10$
$\Leftrightarrow -5x - x \leq -10 + 18$
$\Leftrightarrow -6x \leq 8$
$\Leftrightarrow x \geq -\dfrac{8}{6}$
$\Leftrightarrow x \geq -\dfrac{4}{3}$
donc $S = \left[-\dfrac{4}{3}; +\infty\right[$

Exemple 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :$(2x + 3)(x - 1) \geq (3 + x)(5 + 2x)$

$(2x + 3)(x - 1) \geq (3 + x)(5 + 2x)$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 3x - 3 \geq 15 + 6x + 5x + 2x^2$
$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 \geq 2x^2 + 11x + 15$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 2x^2 + x - 11x \geq 15 + 3$
$\Leftrightarrow -10x \geq 18$
$\Leftrightarrow x \leq -\dfrac{18}{10}$
$\Leftrightarrow x \leq -\dfrac{9}{5}$ ou $x \leq -1,8$
donc $S = \left]-\infty; -\dfrac{9}{5}\right]$

Exemple 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :$\dfrac{x}{2} - \dfrac{5}{3} < 4 - \dfrac{x}{3}$

$\dfrac{x}{2} - \dfrac{5}{3} < 4 - \dfrac{x}{3} \Leftrightarrow \dfrac{3x}{6} - \dfrac{10}{6} < \dfrac{24}{6} - \dfrac{2x}{6}$
$\Leftrightarrow 3x - 10 < 24 - 2x$
$\Leftrightarrow 3x + 2x < 24 + 10 \Leftrightarrow 5x < 34 \Leftrightarrow x < \dfrac{34}{5}$
donc $S = \left]-\infty; \dfrac{34}{5}\right[$

3 Signe d'un binôme

3.1 Définition d'un binôme

Définition :

> Un binôme est une expression littérale de la forme $ax+b$ avec $a \neq 0$

Exemples :

- $2x+3$
- $2x-3$
- $3-2x$
- $-x$

3.2 Activités de découverte

Activité :

- Résoudre $2x+3=0$ puis $2x+3<0$ puis $2x+3>0$ et dresser un tableau de signe de $2x+3$
- Résoudre $2x-3=0$ puis $2x-3<0$ puis $2x-3>0$ et dresser un tableau de signe de $2x-3$
- Résoudre $-2x+3=0$ puis $-2x+3<0$ puis $-2x+3>0$ et dresser un tableau de signe de $-2x+3$
- Résoudre $-2x-3=0$ puis $-2x-3<0$ puis $-2x-3>0$ et dresser un tableau de signe de $-2x-3$

Correction :

x	$-\infty$		$-3/2$		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
$2x-3$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
$-2x+3$		$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$-3/2$		$+\infty$
$-2x-3$		$+$	0	$-$	

3.3 Tableau de signe d'un binôme

De l'activité précédente, on peut conclure que le signe du binôme $ax+b$ est donné par le signe du nombre a qui est devant le x. Pour généraliser on peut dresser le tableau de signe qui fonctionne pour tous les binômes.

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$ax+b$		Signe opposé de a	0	Signe de a	

4 Signe d'un produit de binômes

4.1 Définition

> Un produit de binômes est une expression littérale de la forme :
>
> $$(a_1x + b_1)(a_2x + b_2)(a_3x + b_3)\ldots(a_nx + b_n)$$
>
> avec a_1,a_2 ...a_n non nuls

Comme on sait trouver le signe de chacun des binômes, alors grâce à la règle des signes dans une multiplication, on peut trouver le signe du produit de plusieurs binômes. Pour cela, on va utiliser un tableau de signe qui nous permettra de trouver le signe plus rapidement.

4.2 Tableau de signe

Voici un exemple pour expliquer la méthode permettant de dresser un tableau de signe d'un produit de binômes :
Dressons le tableau des signes de :

$$A(x) = -x(2x - 3)(x + 6)(4 - 2x)$$

- Cherchons les valeurs de x qui annulent chacun des binômes de $A(x)$:
  - ➠ $-x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
  - ➠ $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3/2$
  - ➠ $x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$
  - ➠ $4 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 2$
- Dressons maintenant le tableau des signes de $A(x)$:

x	$-\infty$		-6		0		$3/2$		2		$+\infty$
$-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$2x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+6$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$4-2x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion :
➠ $A(x) > 0$ si $x \in]-\infty; 6[\cup \left]0; \dfrac{3}{2}\right[\cup]2; +\infty[$
➠ $A(x) < 0$ si $x \in]-6; 0[\cup \left]\dfrac{3}{2}; 2\right[$
➠ $A(x) = 0$ si $x \in \left\{-6, 0, \dfrac{3}{2}; 2\right\}$

4.3 Exercices

5 Signe d'une expression rationnelle factorisée

5.1 Définition

Une expression rationnelle factorisée est une expression littérale de la forme :

$$\frac{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)(a_3x+b_3)\dots(a_nx+b_n)}{(a'_1x+b'_1)(a'_2x+b'_2)(a'_3x+b'_3)\dots(a'_nx+b'_n)}$$

avec a_1,a_2 ...a_n et a'_1,a'_2 ...a'_n non nuls

Attention dans ce genre d'expression il y a des valeurs interdites.

5.2 Tableau de signe

Toujours à l'aide des tableaux de signe des binômes et des règles des signes pour la multiplication et la division, on peut trouver le signe d'une expression rationnelle factorisée. Voici un exemple pour expliquer la méthode permettant de dresser un tableau de signe d'une expression rationnelle factorisée :
Dressons le tableau des signes de :

$$B(x) = \frac{2x(3x-6)}{(x-3)(1-x)}$$

- Cherchons les valeurs de x qui annulent chacun des binômes de $B(x)$:
  - ➠ $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
  - ➠ $3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
  - ➠ $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$
  - ➠ $1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- Dressons maintenant le tableau des signes de $B(x)$:

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$3x-6$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$1-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion :
➠ $B(x) > 0$ si $x \in]0;1[\cup]2;3[$
➠ $B(x) < 0$ si $x \in]-\infty;0[\cup]1;2[\cup]3;+\infty[$
➠ $B(x) = 0$ si $x \in \{0;1;2;3\}$

5.3 Exercices

6 Les inéquations du second degré à une inconnue

6.1 Méthode de résolution

Méthode de résolution :

• Tout faire apparaître dans le même membre. • Factoriser le membre non nul. • Dresser son tableau de signe. • Donner l'ensemble des solutions.

6.2 Exemples

Exemple 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(x-2)(3x-4) \leq (x-2)(2x+6)$

$(x-2)(3x-4) \leq (x-2)(2x+6)$
$\Leftrightarrow (x-2)(3x-4)-(x-2)(2x+6) \leq 0$
$\Leftrightarrow (x-2)[(3x-4)-(2x+6)] \leq 0$
$\Leftrightarrow (x-2)(3x-4-2x-6) \leq 0$
$\Leftrightarrow (x-2)(x-10) \leq 0$

Cherchons les valeurs qui annulent les binômes :

➠ $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

➠ $x-10=0 \Leftrightarrow x=10$

Dressons le tableau des signes de $A(x)=(x-2)(x-10)$

x	$-\infty$		2		10		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-10$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ensemble des solutions :

$$S=[2;10]$$

Exemple 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $4(x-2)^2>9$

$4(x-2)^2>9$
$\Leftrightarrow 4(x-2)^2-9>0$
$\Leftrightarrow [2(x-2)+3][2(x-2)-3]>0$
$\Leftrightarrow (2x-4+3)(2x-4-3)>0$
$\Leftrightarrow (2x-1)(2x-7)>0$

Cherchons les valeurs qui annulent les binômes :

➠ $2x-1=0 \Leftrightarrow x=1/2$

➠ $2x-7=0 \Leftrightarrow x=7/2$

Dressons le tableau des signes de $B(x)=(2x-1)(2x-7)$

x	$-\infty$		$1/2$		$7/2$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	
$2x-7$		$-$	$\mid$	$-$	0	$+$	
$B(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ensemble des solutions :

$$S = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{7}{2}; +\infty\right[$$

Exemple 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :$(x+3)^2 < (2x+1)^2$

$(x+3)^2 < (2x+1)^2$
$\Leftrightarrow (x+3)^2 - (2x+1)^2 < 0$
$\Leftrightarrow [(x+3)+(2x+1)][(x+3)-(2x+1)] < 0$
$\Leftrightarrow (3x+4)(-x+2) < 0$
Cherchons les valeurs qui annulent les binômes :

➠ $3x+4=0 \Leftrightarrow x=-4/3$

➠ $-x+2=0 \Leftrightarrow x=2$

Dressons le tableau des signes de $C(x) = (3x+4)(-x+2)$

x	$-\infty$		$-4/3$		2		$+\infty$
$3x+4$		$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	
$-x+2$		$+$	$\mid$	$+$	0	$-$	
$C(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ensemble des solutions :

$$S = \left]-\infty; -\frac{4}{3}\right[\cup]2; +\infty[$$

7 Les inéquations avec expressions rationnelles

7.1 Méthode de résolution

Méthode de résolution :

- Trouver l'ensemble d'étude de l'inéquation.
- Tout faire apparaître dans le même membre.
- Mettre au même dénominateur le membre non nul.
- Factoriser le numérateur.
- Dresser le tableau de signe de l'expression rationnelle factorisée.
- Donner l'ensemble des solutions.

7.2 Exemples

Exemple 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\dfrac{2x+3}{x-1} \leq 4$ Ensemble d'étude :

L'expression $\dfrac{2x+3}{x-1}$ existe si et seulement si $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow$x$\neq 1$ donc $E = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Transformation de l'inéquation :

$\dfrac{2x+3}{x-1} \leq 4$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x+3}{x-1} - 4 \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x+3}{x-1} - \dfrac{4(x-1)}{x-1} \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x+3-4x+4}{x-1} \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2x+7}{x-1} \leq 0$

Cherchons les valeurs qui annulent les binômes :

- $-2x+7 = 0 \Leftrightarrow x = 7/2$
- $x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Dressons le tableau des signes de $A(x) = \dfrac{-2x+7}{x-1}$

x	$-\infty$		1		$7/2$		$+\infty$
$-2x+7$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$	0	$+$	|	$-$	
$A(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	

Ensemble des solutions :

$$S =]-\infty; 1[\cup \left]\frac{7}{2}; +\infty\right[$$

Exemple 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\dfrac{9}{(x+1)^2} > 1$

Ensemble d'étude :

L'expression $\dfrac{9}{(x+1)^2}$ existe si et seulement si $(x+1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ donc $E = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Transformation de l'inéquation :

$\dfrac{9}{(x+1)^2} > 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{9}{(x+1)^2} - 1 > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{9}{(x+1)^2} - \dfrac{(x+1)^2}{(x+1)^2} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{9-(x+1)^2}{(x+1)^2} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(3+x+1)(3-x-1)}{(x+1)^2} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+4)(-x+2)}{(x+1)^2} > 0$

Cherchons les valeurs qui annulent les binômes :

- $x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$
- $-x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 12$
- $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Dressons le tableau des signes de $B(x) = \dfrac{(x+4)(-x+2)}{(x+1)^2}$

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$2-x$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$(x+1)^2$		$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$B(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Ensemble des solutions :

$$S =]-4; -1[\cup]-1; 2[$$

8 Applications

8.1 Ensembles de définition

8.2 Inéquations et fonctions

8.3 Validité d'une expression dans un problème

8.4 Position relative entre deux courbes