

Rappels sur les équations et inéquations du 1^{er} degré

Table des matières

www.physique-maths.com

1	Équation du premier degré	2
2	Équation se ramenant au premier degré	2
2.1	Équation rationnelle	2
2.2	Par une factorisation	3
2.2.1	Par un facteur commun	3
2.2.2	Par une identité remarquable	4
2.3	Par une égalité de deux carrés	4
3	Inéquation du premier degré	5
4	Inéquation se ramenant au premier degré	5
4.1	Par une factorisation	5
4.2	Inéquation rationnelle	6

1 Équation du premier degré

Théorème 1 : Toute équation du premier degré peut se mettre sous la forme :

$$ax = b$$

- Si $a \neq 0$ alors l'équation a une unique solution $x = \frac{b}{a}$
- Si $a = 0$ et $b = 0$ alors tout x est solution $S = \mathbb{R}$.
- Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors l'équation n'a pas de solution $S = \emptyset$

Exemple : Soit l'équation suivante : $\frac{x+2}{3} - \frac{3(x-2)}{4} = \frac{-7x+2}{12} + 2$

⚠ Pour éviter de "traîner" des dénominateurs, multiplions par le dénominateur commun, ici 12

$$\begin{aligned} (\times 12) \quad 4(x+2) - 9(x-2) &= -7x+2+24 \\ 4x+8-9x+18 &= -7x+2+24 \\ 4x-9x+7x &= -8-18+2+24 \\ 2x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

On conclut par l'ensemble solution : $S = \{0\}$

2 Équation se ramenant au premier degré

2.1 Équation rationnelle

Pour une équation rationnelle, on précise son ensemble de définition D_f puis on multiplie l'équation par le dénominateur commun ou éventuellement on effectue un produit en croix.

Exemples :

1) Soit l'équation suivante : $\frac{x-3}{2x-4} = \frac{x-2}{2x-5}$

- On détermine l'ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R} - \left\{2; \frac{5}{2}\right\}$
- On effectue un produit en croix :

$$\begin{aligned} x \in D_f \quad (x-3)(2x-5) &= (x-2)(2x-4) \\ 2x^2 - 5x - 6x + 15 &= 2x^2 - 4x - 4x + 8 \\ -5x - 6x + 4x + 4x &= -15 + 8 \\ -3x &= -7 \\ x &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

$$\text{or } \frac{7}{3} \in D_f \quad \text{donc} \quad S = \left\{\frac{7}{3}\right\}$$

2) Soit l'équation suivante : $\frac{-4}{x-4} + \frac{1}{x} = \frac{-3}{x-3}$

- On détermine l'ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R} - \{0;3;4\}$
- On multiplie par le dénominateur commun ici $x(x-4)(x-3)$:

$$\begin{aligned} x \in D_f \quad -4x(x-3) + (x-4)(x-3) &= -3x(x-4) \\ -4x^2 + 12x + x^2 - 3x - 4x + 12 &= -3x^2 + 12x \\ -4x^2 + x^2 + 3x^2 - 3x - 4x &= -12 \\ -7x &= -12 \\ x &= \frac{12}{7} \end{aligned}$$

or $\frac{12}{7} \in D_f$ donc $S = \left\{ \frac{12}{7} \right\}$

2.2 Par une factorisation

Lorsqu'une équation polynomiale n'est pas du premier degré, on "*pass*e" tous les termes à gauche, c'est à dire qu'on **annule le second membre**. On cherche ensuite à factoriser si cela est possible.

Il existe deux façons pour factoriser : soit par un facteur commun soit par une identité remarquable.

2.2.1 Par un facteur commun

Règle 1 : Une factorisation par un facteur commun peut se résumer par l'égalité suivante :

$$ab + ac = a(b + c)$$

Exemple : Soit l'équation suivante : $(x-1)(2x+3) = (x-1)(x-6)$

⚠ On pourrait être tenté de simplifier par $x-1$ car il apparaît de chaque côté de l'équation. Cependant cette quantité pourrait être nulle et l'on serait dans le cas d'une division par "*zéro*" ce qui est impossible. Il faut donc annuler le second membre puis factoriser.

$$\begin{aligned} (x-1)(2x+3) &= (x-1)(x-6) \\ (x-1)(2x+3) - (x-1)(x-6) &= 0 \\ (x-1)[(2x+3) - (x-6)] &= 0 \\ (x-1)(2x+3-x+6) &= 0 \\ (x-1)(x+9) &= 0 \end{aligned}$$

un produit est nul lorsque l'un au moins des facteurs est nul

$$\begin{aligned} x-1 &= 0 \quad \text{ou} \quad x+9 = 0 \\ x &= 1 \quad \text{ou} \quad x = -9 \end{aligned}$$

$$S = \{-9;1\}$$

2.2.2 Par une identité remarquable

Règle 2 : Il y a trois identités remarquables du second degré qui permettent de factoriser :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad \text{différence de deux carrés}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \quad \text{carré parfait}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \quad \text{carré parfait}$$

Exemple : Soit l'équation suivante : $(5x + 2)^2 = (x + 1)^2$

On annule le second le membre puis on factorise par une différence de deux carrés.

$$\begin{aligned} (5x + 2)^2 &= (x + 1)^2 \\ (5x + 2)^2 - (x + 1)^2 &= 0 \\ (5x + 2 - x - 1)(5x + 2 + x + 1) &= 0 \\ (4x + 1)(6x + 3) &= 0 \\ 3(4x + 1)(2x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

un produit est nul lorsque l'un au moins des facteur est nul

$$\begin{aligned} 4x + 1 &= 0 & \text{ou} & \quad 2x + 1 = 0 \\ 4x &= -1 & \text{ou} & \quad 2x = -1 \\ x &= -\frac{1}{4} & \text{ou} & \quad x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{4}; -\frac{1}{2} \right\}$$

⚠ Cette équation peut aussi se résoudre par l'égalité de deux carrés. Cf ci-après.

2.3 Par une égalité de deux carrés

Règle 3 : Deux nombres au carré sont égaux si et seulement si ces nombres sont égaux ou opposés. C'est à dire que :

$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b \quad \text{ou} \quad a = -b$$

Exemple : Reprenons l'exemple dernier : $(5x + 2)^2 = (x + 1)^2$

Égalité de deux carrés donc :

$$\begin{aligned} 5x + 2 &= x + 1 & \text{ou} & \quad 5x + 2 = -x - 1 \\ 5x - x &= -2 + 1 & \text{ou} & \quad 5x + x = -2 - 1 \\ 4x &= -1 & \text{ou} & \quad 6x = -3 \\ x &= -\frac{1}{4} & \text{ou} & \quad x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{4}; -\frac{1}{2} \right\}$$

3 Inéquation du premier degré

Théorème 2 : Toute inéquation du premier degré peut se mettre sous l'une des formes suivantes :

$$ax \leq b \quad , \quad ax < b \quad , \quad ax \geq b \quad , \quad ax > b$$

- Si $a \neq 0$ on obtient soit une section finissante, soit une section commençante.
- Si $a = 0$ l'inéquation est soit toujours vraie, soit impossible

⚠ Lorsque l'on multiplie ou divise une inéquation par un nombre négatif, il faut inverser l'inégalité

Exemple : Résoudre l'inéquation suivante : $2(x - 1) - 3(x + 1) > 4(3x + 2)$

$$\begin{aligned} 2(x - 1) - 3(x + 1) &> 4(3x + 2) \\ 2x - 2 - 3x - 3 &> 12x + 8 \\ 2x - 3x - 12x &> 2 + 3 + 8 \\ -13x &> 13 \end{aligned}$$

on divise par -13 , on inverse donc l'inégalité : $x < \frac{13}{-13} \Leftrightarrow x < -1$

on conclut par l'intervalle solution : $S =] -\infty ; -1[$

4 Inéquation se ramenant au premier degré

Pour résoudre une inéquation qui se ramène au 1^{er} degré par une factorisation ou par le quotient de facteurs du 1^{er} degré, on remplit un tableau de signe afin de pouvoir conclure sur l'ensemble solution.

Règle 4 : Le signe du binôme $ax + b$, suivant les valeurs de x , peut se résumer au tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $-a$		signe de a

4.1 Par une factorisation

Exemple : Soit l'inéquation suivante : $(x - 5)(x - 2) < (x - 5)(2x - 3)$

L'inéquation n'est pas du 1^{er} degré et le second terme de l'inéquation n'est pas nul. Il faut revenir à une forme factorisée avec un second terme nul.

- On annule le second terme. L'inéquation devient alors :

$$(x - 5)(x - 2) - (x - 5)(2x - 3) < 0$$

- On factorise :

$$(x - 5) [(x - 2) - (2x - 3)] < 0$$

$$(x - 5)(x - 2 - 2x + 3) < 0$$

$$(x - 5)(-x + 1) < 0$$

On remplit alors un tableau de signes en ayant pris soin auparavant de calculer les valeurs frontières.

- Valeurs frontières :

$$x - 5 = 0 \quad \text{donc} \quad x = 5$$

$$-x + 1 = 0 \quad \text{donc} \quad -x = -1 \quad \text{d'où} \quad x = 1$$

- On a le tableau de signes :

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
$x - 5$	-		-	0	+
$-x + 1$	+	0	-		-
$(x - 5)(-x + 1)$	-	0	+	0	-

- Pour que le produit soit strictement négatif, nous avons deux possibilités

$$x < 1 \quad \text{ou} \quad x > 5$$

La solution est donc : $S =] - \infty ; 1 [\cup] 5 ; +\infty [$

4.2 Inéquation rationnelle

Exemple : Soit l'inéquation suivante : $\frac{4}{x+1} \leq 3$

Après avoir déterminé l'ensemble de définition, comme le second terme n'est pas nul, il faut donc l'annuler. On réduit ensuite au même dénominateur de façon à n'avoir qu'une seule fraction.

- Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$
- On annule le second terme et on réduit au même dénominateur :

$$\frac{4}{x+1} - 3 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4 - 3x - 3}{x+1} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-3x + 1}{x+1} \leq 0$$

- On cherche les valeurs frontières :

$$-3x + 1 = 0 \quad \text{donc} \quad -3x = -1 \quad \text{d'où} \quad x = \frac{1}{3}$$

$$x + 1 = 0 \quad \text{donc} \quad x = -1$$

- On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$-3x + 1$	+	+	0	-
$x + 1$	-	0	+	+
$\frac{-3x + 1}{x + 1}$	-	+	0	-

- Conclusion : pour que le quotient soit négatif ou nul, on a donc :

$$x < -1 \quad \text{ou} \quad x \geq \frac{1}{3}$$

La solution est donc : $S =] -\infty ; -1 [\cup \left[\frac{1}{3} ; +\infty [$