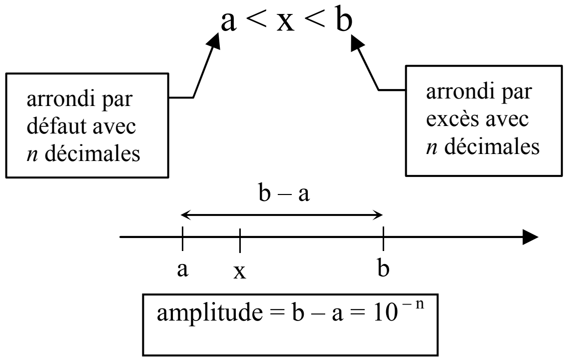
Encadrement et valeur approchée d'un réel

1) Encadrement et valeur approchée d'un réel dont on peut calculer les décimales

Soit x un réel dont on connaît $n+1$ décimales
Pour encadrer à 10^{-n} par deux décimaux le nombre x on écrit



La valeur approchée de x est l'arrondit à n décimales de ce nombre avec la règle suivante :

- si la décimale de rang $n+1$ est < 5 on arrondit par défaut
- dans le cas contraire on arrondit par excès

2) Exemples

Encadrer le nombre $\frac{2}{7}$ à 10^{-4} près

Les quatre première décimales sont : 2857….

Donc $0,2857 < \frac{2}{7} < 0,2858$

5ème décimal < 5
arrondi par défaut

Valeur approchée de $\frac{2}{7}$ à 10^{-4} près

Les cinq première décimales sont : 2 8 5 7 1

Donc $\frac{2}{7} \approx 0,2857$ à 10^{-4} près

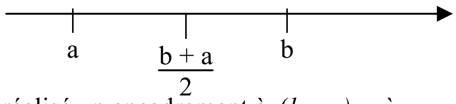
Encadrer le nombre $\sqrt{23}$ à 10^{-2} près
Les deux première décimales sont : 79
Donc $4,79 < \sqrt{23} < 4,8$

3ème décimal =5
arrondi par excès

Valeur approchée de $\sqrt{23}$ à 10^{-2} près
Les trois première décimales sont : 7 8 5
Donc $\sqrt{23} \approx 4,78$ à 10^{-2} près

3) Encadrement d'un réel dont on ne connaît pas toutes les décimales

On cherche deux décimaux a et b tels que :
1) On est sûr que : $a < x < b$
2) $b - a$ est le plus petit possible



On a réalisé un encadrement à *(b – a) près*
On choisit comme valeur approchée de x :

$$x \approx \frac{b+a}{2}$$

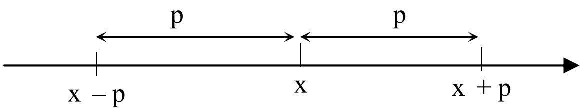
La mesure de la longueur d'une planche donne un résultat entre 1,52 m et 1,54 m

Soit L la longueur de la planche on a :
$1,52 < L < 1,54$
$1,54 - 1,25 = 0,02$
L'encadrement réalisé est à 0,02 m près
Une valeur approchée de cette longueur est :

$$L = \frac{1,52 + 1,54}{2} = 1,53 \text{ m}$$

4) Précision d'un encadrement

Dans le cas d'une mesure x_o on donne souvent une valeur approchée x à une précision p près :



Encadrement $x - p < x_o < x + p$
Encadrement à $2 \times p$ près
L'amplitude de l'encadrement est le double de la précision

La masse *m* d'un objet est de 2,253 kg avec une précision de 1 gramme (0,001 kg)

Valeur approchée : $m \approx 2,253$ kg

Encadrement $2,253 - 0,001 < m < 2,253 + 0,001$
$2,252 < m < 2,254$
Encadrement à 0,002 kg près

5) Utilisation des valeurs absolues

Si x est la valeur approchée d'un nombre x_o à la précision p près, on peut écrire :
$|x_0 - x| < p$

En effet, on a donc :
$-p < x_0 - x < p$
$x - p < x_0 < x + p$
On a réalisé un encadrement à *2p près*

Soit d_0 dont une valeur approchée est $d = 10,459$ avec une précision de 2×10^{-3}.

On peut écrire
$|d_0 - 10,459| < 2 \times 10^{-3}$.
$-2 \times 10^{-3}. < d_0 - 10,459 < 2 \times 10^{-3}$.
$10,459 - 2 \times 10^{-3} < d_0 < 10,459 + 2 \times 10^{-3}$.
$10,459 - 0,002 < d_0 < 10,459 + 0,002$.
$10,457 < d_0 < 10,461$
Encadrement à $0,004 = 4 \times 10^{-3}$.près