

DISTANCE ET VALEUR ABSOLUE

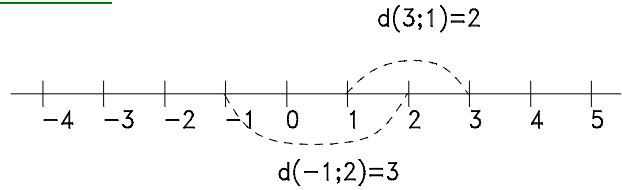
I. Distance entre deux nombres.

1- Activité préparatoire.

Par exemple:

$$d(3; 1) = 2$$

$$d(-1; 2) = 3.$$



2- Définition.

◆ Soient a et b deux réels. On note $d(a; b)$ la **distance** entre a et b .

◆ Pour tous réels a et b ,	$d(a; b)$ est un nombre réel positif
	$d(a; b) = d(b; a)$

◆ Comment calculer $d(a; b)$ dans le cas général ?

Soient a et b deux réels,

si $a \geq b$, alors $d(a; b) = a - b$,

si $a \leq b$, alors $d(a; b) = b - a$.

II. Valeur absolue d'un nombre.

1- Définition.

Soit a un nombre réel.

On appelle **valeur absolue de a** , notée $|a|$, la distance entre a et 0.

$$|a| = d(a; 0)$$

Par exemple, $|32| = d(32; 0) = 32$

et $|\frac{-7}{2}| = d(\frac{-7}{2}; 0) = \frac{7}{2}$

2- Propriétés.

Pour tout nombre réel a ,

- $|a|$ est un nombre réel positif.
- Si a est positif, $|a| = a$
Si a est négatif, $|a| = \text{opp}(a) = -a$
- Deux nombres opposés ont la même valeur absolue : $|-a| = |a|$

3-Conséquence.

Deux expressions algébriques opposées ont la même valeur absolue.

Par exemple, $|-\pi - x| = |\pi + x|$, et $|3 - x| = |x - 3|$

III. Valeur absolue et distance

◆ Pour tous nombres réels a et b , on a : $d(a; b) = |a - b|$

Par exemple, si x est un nombre réel :

$$d(x; 2) = |x - 2|$$

$$d(x; -1,3) = |x - (-1,3)| = |x + 1,3|$$

◆ Remarque:

Des écritures du type $|x - a|$, $|x + a|$, $|a - x|$ ou $|a + x|$, peuvent être définies, soit en tant que distances, soit en tant que valeurs absolues d'expressions algébriques.

Par exemple, $|2 - x| = |x - 2| = d(x; 2)$

$$|-\sqrt{2} - x| = |x + \sqrt{2}| = d(x; -\sqrt{2})$$

IV. Cas particulier : racine carrée et valeur absolue

Quelle que soit l'expression A , A^2 est toujours positive, donc $\sqrt{A^2}$ existe.

Par exemple, $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$, et $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$.

Propriété

Pour toute expression T , $\sqrt{T^2}$ existe, et $\sqrt{T^2} = |T|$

V. Valeurs absolues et opérations

- La valeur absolue d'un **produit** est égale au produit des valeurs absolues.

Pour tous réels a et b , $|a \times b| = |a| \times |b|$

- La valeur absolue d'un **quotient** est égale au quotient des valeurs absolues.

Pour tous réels a et b , $b \neq 0$, $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

- La valeur absolue d'une **somme** n'est en général pas égale à la somme des valeurs absolues (même problème pour la différence).

Pour tous réels a et b , $|a + b| = \text{????????}$

Par exemple, si $a = -3$ et $b = -1$, $|a + b| = 4$ et $|a| + |b| = 4$

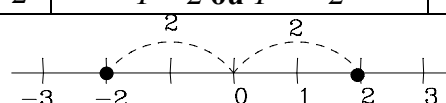
si $a = -3$ et $b = 1$, $|a + b| = 2$ et $|a| + |b| = 4$

Pour tous réels a et b , $|a + b| \leq |a| + |b|$ (**inégalité triangulaire**)

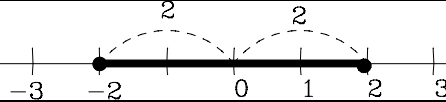
VI. Expressions Équivalentes

Suivant le type de problèmes que l'on est amené à résoudre, on utilise l'une des formulations équivalentes suivantes :

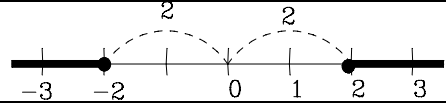
valeur absolue	distance	égalités ou inégalités	encadrement	intervalles
$ T = 2$	$d(T; 0) = 2$	$T = 2$ ou $T = -2$	*	*



valeur absolue	distance	égalités ou inégalités	encadrement	intervalles
$ T \leq 2$	$d(T; 0) \leq 2$	$T \leq 2$ et $T \geq -2$	$-2 \leq T \leq 2$	$T \in [-2; 2]$



valeur absolue	distance	égalités ou inégalités	encadrement	intervalles
$ T \geq 2$	$d(T; 0) \geq 2$	$T \geq 2$ ou $T \leq -2$	*	$T \in]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$



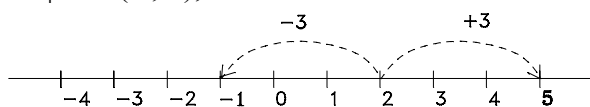
VII. Équations et valeurs absolues

Résoudre $|x - 2| = 3$

Il existe deux façons de déterminer les solutions de cette équation :

- en utilisant les distances**

Puisque $|x - 2| = d(x; 2)$, on cherche les nombres x tels que $d(x; 2) = 3$



On a donc $S = \{-1; 5\}$

- en utilisant les propriétés de la valeur absolue**

On connaît l'équivalence : $|T| = 3$

$T = 3$ **ou** $T = -3$

On a donc l'équivalence : $|x - 2| = 3$

$$x - 2 = 3 \text{ ou } x - 2 = -3$$

$$x = 5 \text{ ou } x = -1$$

$$S = \{-1; 5\}$$

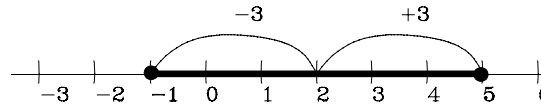
Par suite :

VIII. Inéquations et valeurs absolues

1 ♦ Résoudre $|x - 2| \leq 3$

- **En utilisant les distances**

On cherche les nombres x tels que : $d(x, 2) \leq 3$



On a donc un intervalle-solution $S = [-1 ; 5]$.

- **en utilisant les propriétés de la valeur absolue**

On connaît l'équivalence : $|T| \leq 3$
 $-3 \leq T \leq 3$

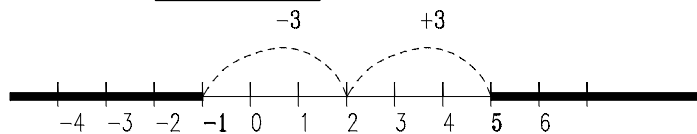
On a donc l'équivalence : $|x - 2| \leq 3$
 $x - 2 \geq -3$ et $x - 2 \leq 3$
 $x \geq -1$ et $x \leq 5$

Par suite : $S = [-1 ; 5]$; les deux conditions doivent être vérifiées **à la fois**.

2 ♦ Résoudre $|x - 2| > 3$

- **en utilisant les distances**

On cherche les nombres x tels que : $d(x; 2) > 3$



On a donc $S =]-\infty ; -1[\cup]5 ; +\infty[$

- **en utilisant les propriétés de la valeur absolue**

On connaît l'équivalence : $|T| > 3$
 $T < -3$ ou $T > 3$

On a donc l'équivalence : $|x - 2| > 3$
 $x - 2 < -3$ ou $x - 2 > 3$
 $x < -1$ ou $x > 5$

Par suite : $S =]-\infty ; -1[\cup]5 ; +\infty[$; les solutions doivent vérifier **l'une ou l'autre** des conditions.

IX- Encadrements et valeurs approchées d'un nombre.

Soit α un nombre strictement positif.

$ x - a \leq \alpha$	$a - \alpha \leq x \leq a + \alpha$	signifie que a est une valeur approchée de x à la précision α
	$a \leq x \leq a + \alpha$	signifie que a est une valeur approchée par défaut de x à la précision α
	$a - \alpha \leq x \leq a$	signifie que a est une valeur approchée par excès de x à la précision α

DISTANCE ET VALEUR ABSOLUE

I- Distance entre deux réels.

1- Activité préparatoire.

2- Définition.

II- Valeur absolue d'un nombre

1- Définition.

2- Propriétés.

3-Conséquence.

III- Valeur absolue et distance

IV- Cas particulier : racines carrées et valeur absolue.

V- Valeur absolue et opérations

VI- Expression équivalente.

VII- Equations et valeurs absolues.

VIII- Inéquations et valeurs absolue.

IX- Encadrements et valeurs approchées d'un nombre.