Valeur absolue et distances entre deux réels.

Pré-requis : Intervalles de $\mathbb{R}$, ordre et comparaison.
Eventuellement : fonctions affines, parité, variations.

I- Valeur absolue ou distance à zéro d'un nombre.

1- Notation. Définition. Exemples.

Notation : la valeur absolue d'un nombre réel se notre entre deux barres verticales. Par exemple, la valeur absolue du nombre x se note $|x|$.

Définition :
Lorsqu'un nombre est positif, sa valeur absolue est lui-même.

Par exemple : $|3| = 3$, $\left|\frac{5}{3}\right| = \frac{5}{3}$, $|\pi| = \pi$.

Lorsqu'un nombre est négatif, sa valeur absolue est son opposé.

Par exemple $|-3| = 3$, $\left|-\frac{17}{15}\right|$ et $|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$.

$|0| = 0$. (0 est à la fois positif et négatif)

Conséquences :

- La valeur absolue de tout nombre est un nombre positif. (propriété 1)

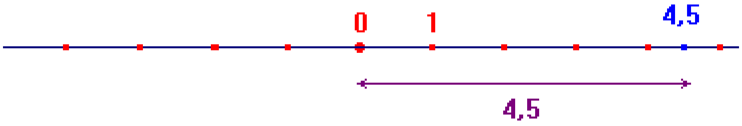
Soit : pour tout x réel, $|x| \geq 0$.

- Pour tout $x \geq 0$, $|x| = x$ et pour tout $x \leq 0$, $|x| = -x$. (propriété 2)

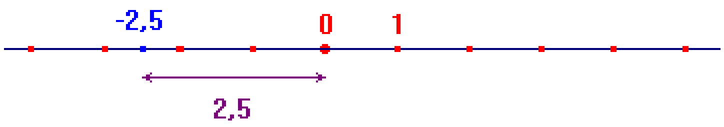
Remarque importante : - x est alors un nombre positif.
Comprenez bien que si x = -3, par exemple, alors – x = - (- 3) = 3. Donc –x > 0.

2- Distance à zéro.

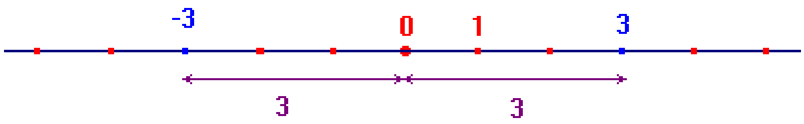
Sur la droite graduée des réels, la valeur absolue d'un nombre correspond à sa distance à zéro.



La distance à zéro de 4,5 est 4,5, ou encore $|4,5|$.
La distance à zéro d'un nombre positif est lui-même.



La distance à zéro de – 2,5 est 2,5, ou encore $|-2,5|$.
La distance à zéro d'un nombre négatif est son opposé.



- 3 et 3 sont à la même distance de zéro : 3. Soit $|-3| = |3| = 3$.
Deux nombres opposés ont même valeur absolue.
Pour tout x réel, $|x| = |-x|$. (propriété 3)

Remarque importante : Deux nombres opposés ont même distance à zéro, soit même valeur absolue. Et deux nombres qui ont même valeur absolue sont soit égaux, soit opposés.
Soit : $|x| = |y|$ équivaut à $x = y$ ou $x = -y$. (propriété 4)

Exemple : **$|x| = 3,8$ équivaut à $x = 3,8$ ou $x = -3,8$.**

$|x| = 3,8$ est une équation d'inconnue x dont les solutions sont 3,8 et –3,8.

Applications dans des résolutions d'équations avec des valeurs absolues :

$\left|\frac{2x-3}{7}\right| = 2$ équivaut à $\frac{2x-3}{7} = 2$ ou $\frac{2x-3}{7} = -2$

Soit $2x - 3 = 14$ ou $2x - 3 = -14$.
Soit $2x = 17$ ou $2x = -11$.
Soit $x = \frac{17}{2}$ ou $x = -\frac{11}{2}$

$$S = \left\{ \frac{17}{2} ; -\frac{11}{2} \right\}$$

$|3x + 5| = |-2x + 3|$ équivaut à $3x + 5 = -2x + 3$ ou $3x + 5 = -(-2x + 3)$
Soit $5x = -2$ ou $3x + 5 = 2x - 3$
Soit $x = -\frac{2}{5}$ ou $x = -8$.

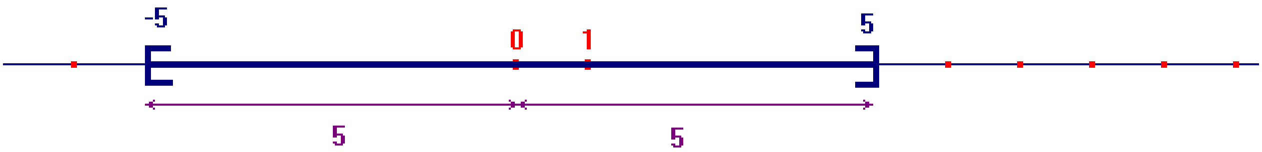
$$S = \left\{ -8 ; -\frac{2}{5} \right\}$$

$|x - 6| = -9$ n'a pas de solutions car la valeur absolue d'un nombre est toujours positive.
(propriété 1) $S = \varnothing$.

$|x + 8| = 0$ si et seulement si $x + 8 = 0$, soit $x = -8$.
$S = \{ -8 \}$

3- **<u>Inéquations</u>.**

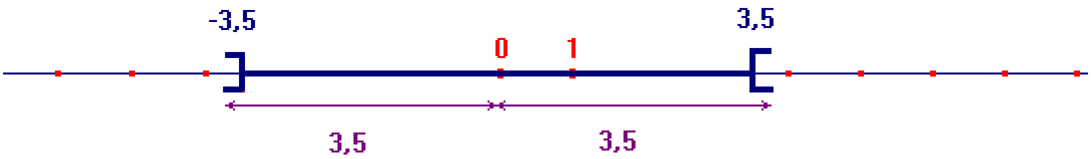
$|\mathbf{x}| \leq \mathbf{5}$ est une inéquation dont les solutions sont tous les nombres réels dont la distance à zéro est inférieure ou égale à 5, c'est à dire tous les nombres compris entre – 5 et 5 au sens large.



Pour $|x| \leq 5$, **S = [-5 ;5]**

$|x| \leq 5$ équivaut à $-5 \leq x \leq 5$.

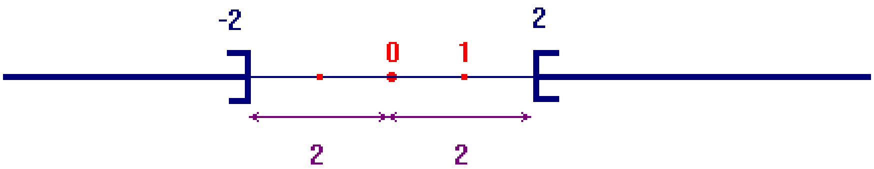
De même, $|\mathbf{x}| < \mathbf{3,5}$ est une inéquation dont les solutions sont tous les nombres réels dont la distance à zéro est strictement inférieure à 3,5. Ce sont tous les nombres compris entre –3,5 et 3,5 au sens strict.



Pour $|x| < 3,5$, **S =]-3,5 ; 3,5[**

$|x| < 3,5$ équivaut à $-3,5 < x < 3,5$.

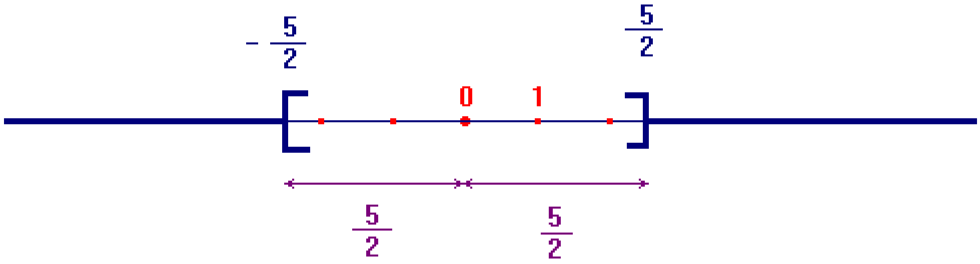
$|\mathbf{x}| \geq \mathbf{2}$ est une inéquation dont les solutions sont tous les nombres réels dont la distance à zéro est supérieure ou égale à 2. Ce sont tous les nombres inférieurs ou égaux à – 2 ou supérieurs ou égaux à 2.



Pour $|x| \geq 2$, **S =] - ∞ ; - 2] ∪[2 ; + ∞ [**

$|x| \geq 2$ équivaut à $x \leq -2$ ou $x \geq 2$.

$|\mathbf{x}| > \mathbf{\frac{5}{2}}$ est une inéquation dont les solutions sont tous les nombres réels dont la distance à zéro est strictement supérieure à $\frac{5}{2}$. Ce sont tous les nombres strictement inférieurs à $-\frac{5}{2}$ ou strictement supérieurs à $\frac{5}{2}$.



Pour $|x| > \frac{5}{2}$, $\mathbf{S =]-\infty\,;-\frac{5}{2}[\, \cup\,]\frac{5}{2}\,;+\infty[}$

$|x| > \frac{5}{2}$ **équivaut à** $x < -\frac{5}{2}$ **ou** $x > \frac{5}{2}$.

<u>Applications dans des résolutions d'inéquations avec des valeurs absolues</u> :

$\left|\frac{3-x}{5}\right| < 10$ équivaut à $-10 < \frac{3-x}{5} < 10$

Soit $-50 < 3 - x < 50$

Soit $-53 < -x < 47$

Soit $53 > x > -47$ (en multipliant les trois membres pas –1)

Soit $-47 < x < 53$

$\mathbf{S =]-47\,;53[}$

$\left|\frac{3x-6}{4}\right| \geq 2$ équivaut à $\frac{3x-6}{4} \leq -2$ ou $\frac{3x-6}{4} \geq 2$.

Soit $3x - 6 \leq -8$ ou $3x - 6 \geq 8$

Soit $3x \leq -2$ ou $3x \geq 14$

Soit $x \leq -\frac{2}{3}$ ou $x \geq \frac{14}{3}$

$\mathbf{S =]-\infty\,;-\frac{2}{3}]\, \cup\, [\frac{14}{3}\,;+\infty[}$

$\left|\frac{-6x+7}{12}\right| \leq -3$ n'a pas de solutions car une valeur absolue est toujours un nombre positif ou nul (propriété 1). $\mathbf{S = \varnothing}$.

$|3x+8| \geq -2$ est toujours vraie car une valeur absolue est toujours supérieure ou égale à 0 (propriété 1). $\mathbf{S = \mathbb{R}}$.

$|-6x+9| > 0$ si et seulement si $-6x + 9 \neq 0$ puisqu'une valeur absolue est toujours supérieure à 0 et puisque $|-6x+9| = 0$ si et seulement si $-6x + 9 = 0$.

Or $-6x + 9 = 0$ pour $-6x = -9$, soit $x = \frac{3}{2}$.

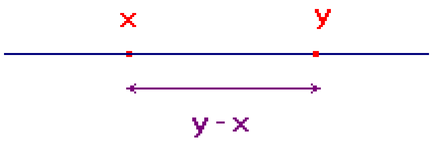
Donc $|-6x+9| > 0$ si et seulement si $x \neq \frac{3}{2}$.

d'où $\mathbf{S} = \mathbb{R} - \{\frac{3}{2}\} =]-\infty ; \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2} ; +\infty[$

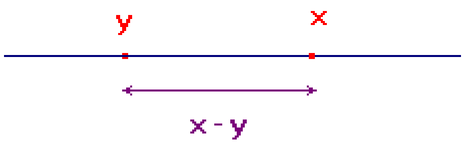
II- Distance entre deux nombres. Centre et rayon d'un intervalle.

1- Distance entre deux nombres.

Soient x et y deux nombres réels.
Si $x \leq y$, la distance entre x et y vaut $y - x$.



Si $x = y$, la distance entre x et y vaut 0.
Si $x \geq y$, la distance entre x et y vaut $x - y$.



Or, si $x \leq y$, $y - x \geq 0$, donc $|y - x| = y - x$
(car la valeur absolue d'un nombre positif est lui-même)
Si $x = y$, la distance entre x et y vaut 0.
Et si $x \geq y$, $y - x \leq 0$, donc $|y - x| = -(y - x) = -y + x = x - y$
(car la valeur absolue d'un nombre négatif est son opposé)

Dans tous les cas, la distance entre x et y vaut $|y - x|$.

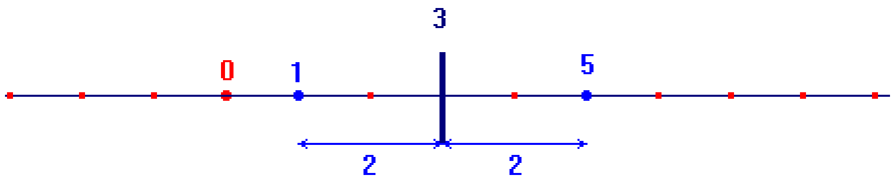
Remarque : comme $y - x$ et $x - y$ sont deux nombres opposés, ils ont même valeur absolue, soit $|y - x| = |x - y|$. Donc la distance entre x – y vaut aussi $|x - y|$.

Conclusion : **Pour tous nombres x et y réels, la distance entre x et y vaut $|y - x|$ ou $|x - y|$**

2- Equations et inéquations. Centre et rayon d'un intervalle.

$\mathbf{|x - 3| = 2}$ signifie que la distance de x à 3 vaut 2.

Donc $|x - 3| = 2$ est une équation dont les solutions sont les nombres x situés à la distance 2 de 3.



Donc $|x - 3| = 2$ équivaut à x = 1 ou x = 5 (car 1 et 5 sont les deux nombres situés à la distance 2 de 3)

S = { 1 ; 5 }

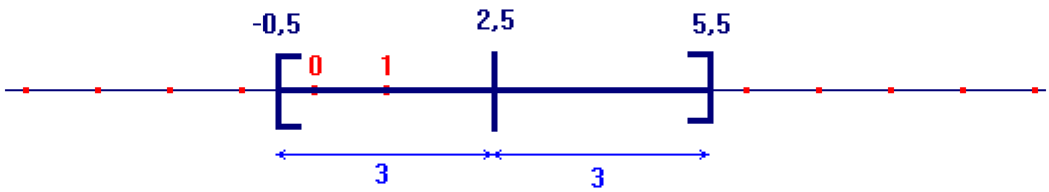
Remarque : on pouvait aussi résoudre cette équation comme dans le paragraphe I – 2.

$|x - 3| = 2$ pour $x – 3 = 2$ ou $x – 3 = - 2$.

Soit $x = 5$ ou $x = 1$

S = { 1 ; 5 }

$|x – 2,5| \leq 3$ est une inéquation dont les solutions sont tous les nombres situés à une distance de 2,5 inférieure ou égale à 3. Ses solutions sont tous les nombres situés à une distance de 2,5 inférieure ou égale à 3.



S = [- 0,5 ; 5,5]

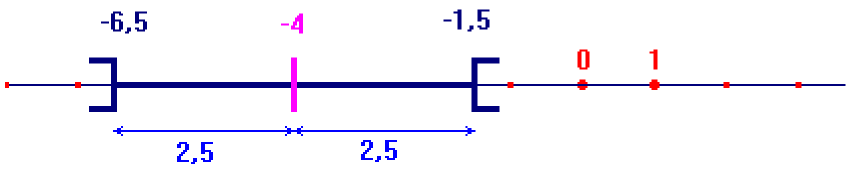
2,5 est le **centre** de l'intervalle [- 0,5 ; 5,5].
3 est le **rayon** de cet intervalle.

$|\mathbf{x + 4}|$ **< 2,5** équivaut à $|x – (-4)| < 2,5$.

Attention : $|x + 4|$ n'est pas la distance de x à 4 mais celle de x à – 4 !

Rappel : la distance de x à y est $|x - y|$!

$|x – (-4)| < 2,5$ est une inéquation dont les solutions sont tous les nombres situés à une distance de - 4 strictement strictement inférieure à 2,5.



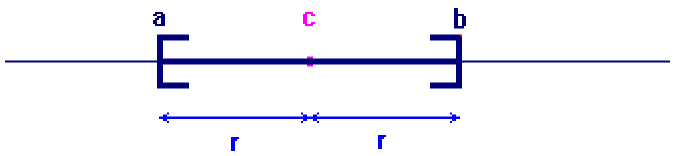
S =] – 6,5 ; - 1,5 [

- 4 est le **centre** de l'intervalle] – 6,5 ; - 1,5 [
2,5 est le **rayon** de cet intervalle.

Définition : Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Le **centre** c de l'intervalle [a , b] est $c = \dfrac{a + b}{2}$

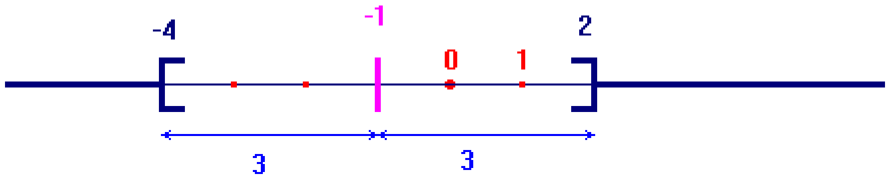
Le **rayon** r de l'intervalle [a , b] est $r = \dfrac{b - a}{2}$



Remarque : l'intervalle [a , b] est aussi l'intervalle [c – r , c + r]. a = c – r , b = c + r.

$|\mathbf{x + 1}| > \mathbf{3}$ équivaut à $|x - (-1)| > 3$.

Les solutions de cette inéquation sont tous les réels x situés à une distance de – 1 strictement supérieure à 3.



$\mathbf{S =]-\infty ; -4 [\cup] 2 ; +\infty [}$

III- Propriétés de la valeur absolue dans des calculs. (facultatif)

1- Somme et inégalité triangulaire.

Calculer $|(-4) + (-5)|$ et $|-4| + |-5|$. Ces deux quantités sont-elles égales ?

$|(-4) + (-5)| = |-9| = 9$

$|-4| + |-5| = 4 + 5 = 9$.

Oui, ces deux quantités sont égales.

Calculer $|(-1) + 5|$ et $|-1| + |5|$. Ces deux quantités sont-elles égales ?

$|(-1) + 5| = |4| = 4$

$|-1| + |5| = 1 + 5 = 6$

Non, ces deux quantités ne sont pas égales.

Attention : la valeur absolue de la somme de deux nombres n'est pas forcément égale à la somme des valeurs absolues de ces deux nombres !

On admet que, si deux nombres a et b ont même signe, on a $|a + b| = |a| + |b|$

et si a et b n'ont pas même signe $|a + b| < |a| + |b|$.

On retiendra le théorème de l'inégalité triangulaire :

Théorème 1 : **Pour tous réels a et b, on a $|a + b| \leq |a| + |b|$.**

2- Produit.

Théorème 2 (admis) : **Pour tous nombres réels a et b, $|a \times b| = |a| \times |b|$.**

Exemples : a = 5 et b = 8.

$|a \times b| = |5 \times 8| = |40| = 40.$

$|a| \times |b| = |5| \times |8| = 5 \times 8 = 40$

On a bien $|a \times b| = |a| \times |b|$

a = 7 et b = -3

$|a \times b| = |7 \times (-3)| = |-21| = 21$

$|a| \times |b| = |7| \times |-3| = 7 \times 3 = 21$

On a bien $|a \times b| = |a| \times |b|$

a = - 5 et b = - 0,2.

$|a \times b| = |(-5) \times (-0{,}2)| = |1| = 1$

$|a| \times |b| = |-5| \times |-0{,}2| = 5 \times 0{,}2 = 1$

On a bien $|a \times b| = |a| \times |b|$

3- Quotient.

Théorème 3 (admis) : **Pour tous nombres réels a et b, b ≠ 0, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.**

Exemples : Pour a = -12 et b = 4.

$\left|\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{-12}{4}\right| = |-3| = 3$

$\frac{|a|}{|b|} = \frac{|-12|}{|4|} = \frac{12}{4} = 3.$

On a bien $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Pour a = -23 et b = -10.

$\left|\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{-23}{-10}\right| = |2{,}3| = 2{,}3.$

$\frac{|a|}{|b|} = \frac{|-23|}{|-10|} = \frac{23}{10} = 2{,}3.$

On a bien $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

IV- La fonction valeur absolue et sa courbe représentative.

On étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

D'après la propriété 2, si $x \geq 0$, alors $|x| = x$, et si $x \leq 0$, alors $|x| = -x$.
Traçons dans un même repère les droites d1 d'équation $y = x$ et d2 d'équation $y = -x$.
Pour les valeurs de x positives, c'est à dire à droite de l'axe des ordonnées, la courbe représentative de f sera confondue avec la droite d'équation $y = x$, car celle-ci est la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto x$.
Et pour les valeurs de x négatives, c'est à dire à gauche de l'axe des ordonnées, la courbe représentative de f sera confondue avec la droite d'équation $y = -x$, car celle-ci est la courbe représentative de la fonctions $x \longmapsto -x$.

La courbe obtenue, formée de deux demi-droites, est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, ce qui signifie que la fonction valeur absolue est paire.
On le sait aussi car pour tout x réel, $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$ d'après la propriété 3.