

Compléments sur la valeur absolue

www.physique-maths.com

1 Équations du type $|u(x)| = |v(x)|$

Règle 1 : $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = |y| \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y$

Exemple : Résoudre dans \mathbb{R} : $|2x - 1| = |5 - x|$

D'après la règle précédente, on a :

$$2x - 1 = 5 - x \text{ ou } 2x - 1 = -5 + x \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -4$$

Graphiquement : Il faut tracer les fonctions $f(x) = |2x - 1|$ et $g(x) = |5 - x|$

Il faut alors trouver les différentes formes des fonctions f et g . On détermine les valeurs frontières c'est à dire les valeurs de x qui annulent les fonctions f et g .

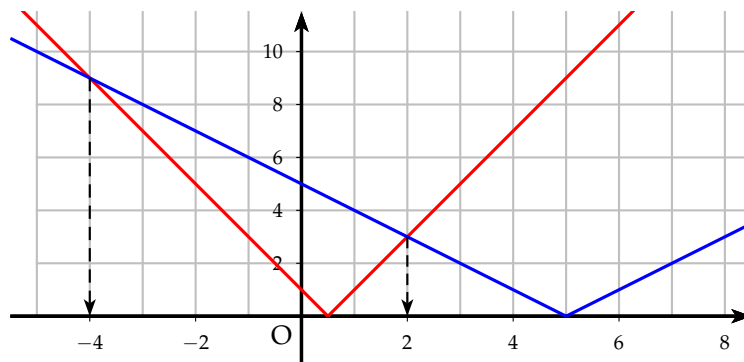
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ et } g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

On trace ensuite les tableaux suivants :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x - 1$	-	0	+
$ 2x - 1 $	$-2x + 1$	0	$2x - 1$

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$5 - x$	+	0	-
$ 5 - x $	$5 - x$	0	$5 + x$

On obtient alors les représentations suivantes avec les solutions (abscisses des points d'intersection)



2 Inéquation du type $|u(x)| < r$ et $|u(x)| > r$

Règle 2 : Soit $r > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$

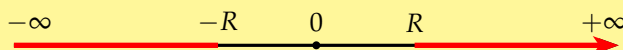


Remarque : Même encadrement avec des inégalités larges

Exemple : Résoudre dans \mathbb{R} , l'inéquation : $|5x - 2| < 3$

$$-3 < 5x - 2 < 3 \Leftrightarrow -1 < 5x < 5 \Leftrightarrow -\frac{1}{5} < x < 1 \Leftrightarrow S =]-\frac{1}{5}, 1[$$

Règle 3 : Soit $r > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| > r \Leftrightarrow x < -r$ ou $x > r$



Remarque : Même encadrement avec des inégalités larges

Exemple : Résoudre dans \mathbb{R} , l'inéquation : $|3 - 2x| \geq 5$

$$3 - 2x \leq -5 \text{ ou } 3 - 2x \geq 5 \Leftrightarrow x \geq 4 \text{ ou } x \leq -2 \Leftrightarrow S =]-\infty; -2] \cup [4; +\infty[$$

3 Autre type d'équation

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante : $|-3x + 4| + |-5 + x| = 10$ (E_1)

- On détermine les valeurs frontières de chaque valeur absolue :

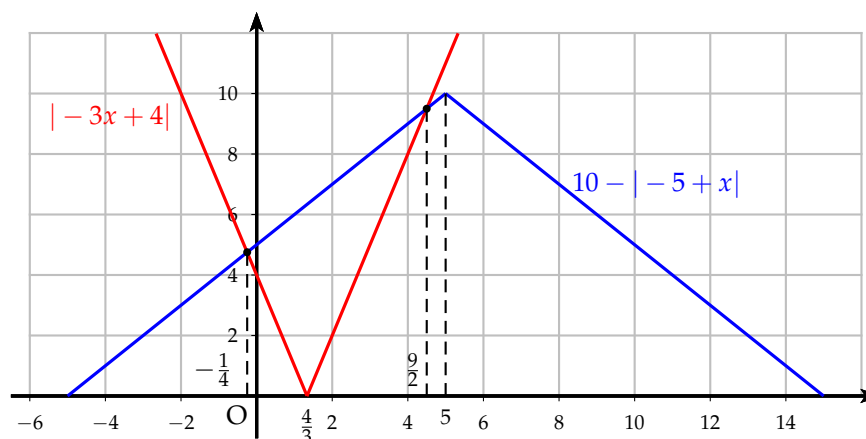
$$-3x + 4 = 0 \text{ et } -5 + x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \text{ et } x = 5$$

- On remplit un tableau de forme :

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	5	$+\infty$
$ -3x + 4 $	$-3x + 4$	0	$3x - 4$	$3x - 4$
$ -5 + x $	$5 - x$	$\frac{11}{3}$	$5 - x$	$-5 + x$
(E_1)	$-4x + 9 = 10$ $x = -\frac{1}{4}$ possible	$2x + 1 = 10$ $x = \frac{9}{2}$ possible	$4x - 9 = 10$ $x = \frac{19}{4}$ impossible	

$$S = \left\{ -\frac{1}{4}; \frac{9}{2} \right\}$$

- Résolution graphique :



4 Autre type d'inéquation

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation suivante : $|2x - 1| \leq |x + 2|$ (E_2)

- On détermine les valeurs frontières de chaque valeur absolue.

$$2x - 1 = 0 \quad \text{soit} \quad x = \frac{1}{2}$$

$$x + 2 = 0 \quad \text{soit} \quad x = -2$$

- On remplit un tableau de forme :

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$ 2x - 1 $	$-2x + 1$	5	$-2x + 1$	0	$2x - 1$
$ x + 2 $	$-x - 2$	0	$x + 2$	$\frac{5}{2}$	$x + 2$
(E_2)	$-2x + 1 \leq -x - 2$ $x \geq 3$ impossible $S_1 = \emptyset$	$-2x + 1 \leq x + 2$ $x \geq -\frac{1}{3}$ $S_2 = \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$	$2x - 1 \leq x + 2$ $x \leq 3$ $S_3 = \left[\frac{1}{2}; 3\right]$		

On obtient alors la solution $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left[-\frac{1}{3}; 3\right]$

- Résolution graphique :

