Second degré

Exercice 1:

Les fonctions ci-dessous sont-elles des fonctions polynômes de degré 2 ?

1. $f(x) = (x+1)(x+2) - 1$
2. $g(x) = 3(x-1)^2 + 3$
3. $k(x) = x^3 - x^2 + 1$
4. $\ell(x) = x^2 + \sqrt{x} + 2$

Exercice 2:

Les fonctions ci-dessous sont des fonctions polynômes de degré 2. Donner les coefficients α, β, γ de leur forme canonique $\alpha(x-\beta)^2 + \gamma$.

1. $f(x) = 3(x+2)^2 - 4$
2. $g(x) = 3x^2 + 3$
3. $k(x) = -(x-1)^2 + \dfrac{1}{3}$
4. $\ell(x) = -2 - (x+1)^2$

Exercice 3:

Relier chaque trinôme à sa forme canonique :

$-x^2 + 8x - 14$ •	• $2(x-4)^2 + 3$
$3x^2 + 12x + 13$ •	• $3(x+2)^2 + 1$
$2x^2 - 2x$ •	• $-(x-4)^2 + 2$
$2x^2 - 16x + 35$ •	• $2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2}$

Exercice 4:

Considérons le trinôme $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$.

1. Montrer que sa forme canonique est $2(x+1)^2 + 3$
2. Construire alors le tableau de variations de f.

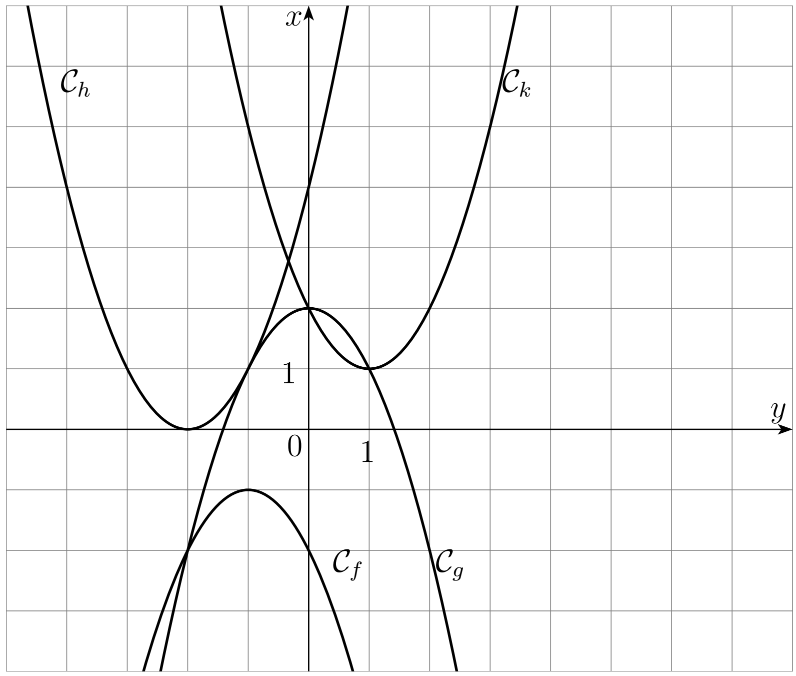
Exercice 5:

Dresser le tableau de variations des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - 3$
2. $g(x) = -(x-2)^2 - 2$
3. $h(x) = -x^2 - 1$
4. $k(x) = -(x+2)^2$

Exercice 6:

Sachant que le coefficient α des trinômes mis sous forme canonique valent 1 ou -1, donner la forme canonique des fonctions polynômes représentées ci-dessous.



Exercice 7:

Résoudre, à l'aide du discriminant, les équations suivantes :

1. $-x^2 + 2x - 1 = 0$
2. $2x^2 - 5x + 2 = 0$
3. $t^2 + t - 1 = 0$
4. $2x - x^2 - 2 = 0$
5. $3x^2 + x + \dfrac{1}{16} = 0$
6. $0,25x^2 + 0,75x + 0,5 = 0$
7. $x^2 = 4x + 1$
8. $(x + 1)^2 - 2 = 2x^2$
9. $\sqrt{3}x^2 + 4x - \sqrt{3} = 0$

Exercice 8:

Résoudre, sans passer par un calcul de discriminant, les équations suivantes :

1. $x^2 - 5 = 0$
2. $(x - 1)(x + 2) = 0$
3. $x^2 + 4 = 0$
4. $x^2 + 4x + 4 = 0$
5. $x(x + 1) + x(x - 2) = 0$
6. $(x - 1)^2 = 2(x - 1)$

Exercice 9:

Pour chaque équation, indiquer s'il est plus astucieux de résoudre l'équation avec ou sans calcul de discriminant puis résoudre l'équation.

1. $-x^2 - 2x = 0$
2. $2(x - 1)^2 - 4 = 0$
3. $x(x + 3) = 3x$
4. $2(x + 1)^2 = x^2 + 1$

Exercice 10:

Si cela est possible, donner une forme factorisée.

1. $f(x) = x^2 + x - 6$
2. $g(x) = 2x^2 + 9x - 11$
3. $h(x) = x^2 + 3x + 4$
4. $k(x) = 9x^2 + 6x + 1$
5. $\ell(x) = 3x^2 - 15x + 12$
6. $m(x) = 2x^2 - 9x + 4$
7. $a(x) = 5x^2 - 2x + 0,2$
8. $b(x) = x^2 - 4$

Exercice 11:

Dresser le tableau de signe des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2 - 5x + 4$
2. $g(x) = x^2 + 12x + 40$
3. $h(x) = 2x^2 - 2x + 0,5$
4. $k(x) = -x^2 + 3x - 1$

Exercice 12:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $x^2 - 8x + 12 < 0$
2. $2x^2 + 2x + 8 \leqslant 0$
3. $-9x^2 + 6x - 1 \geqslant 0$
4. $x^2 - 4x + 2 \geqslant 0$
5. $x^2 - x + 3 < 4$
6. $-x^2 + 2x + 1 \leqslant x^2$
7. $x^2 + x + 4 < x^2 - 4x + 1$
8. $2x^2 + 4x - 1 > x^2 + 2$
9. $x^2 > -2$
10. $x^2 < 9$
11. $-(x-1)(x+2) > 0$
12. $(x-2)(x-3) \leqslant 0$
13. $(x-1)(x^2 - 2x - 3) < 0$
14. $(x^2 + 2x + 8)(x^2 - x - 2) > 0$

Exercice 13:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{1}{x} \geqslant x + 1$
2. $\dfrac{1}{x+2} < \dfrac{x}{x+1}$
3. $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + x + 4} > 0$
4. $\dfrac{1}{x^2 + x + 2} \leqslant 1$

$\boxed{\textit{Correction}}$

Exercice 1:

<u>Méthode :</u> afin de savoir si une fonction est une fonction polynôme de degré 2, il faut commencer par développer et réduire au maximum l'expression donnée si ça n'est pas déjà fait, puis regarder si la fonction est de la forme $ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels donnés.

1. On a :
$$f(x) = x^2 + 2x + x + 2 - 1 = x^2 + 3x + 1$$
Donc $\boxed{f \text{ est une fonction polynôme de degré 2.}}$
2. On a
$$g(x) = 3\left(x^2 - 2x + 1\right) + 3 = 3x^2 - 6x + 3 + 3 = 3x^2 - 6x + 6$$
Donc $\boxed{g \text{ est une fonction polynôme de degré 2.}}$
3. On ne peut pas modifier plus l'expression de la fonction h et on remarque qu'il y a un terme en x^3 donc $\boxed{h \text{ n'est pas une fonction polynôme de degré 2.}}$
4. On ne peut pas modifier plus l'expression de la fonction ℓ et on remarque qu'il y a un terme en $\sqrt{x}$ donc $\boxed{\ell \text{ n'est pas une fonction polynôme de degré 2.}}$

Exercice 2:

1. $\alpha = 3$, $\beta = -2$, $\gamma = -4$
2. $\alpha = 3$, $\beta = 0$, $\gamma = 3$
3. $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\gamma = \dfrac{1}{3}$
4. $\alpha = -1$, $\beta = -1$, $\gamma = -2$

Exercice 3:

<u>Méthode :</u> Il faut ici partir des formes canoniques, les développer pour savoir quelle forme développée leur correspond.

- $\boxed{2(x-4)^2 + 3} = 2(x^2 - 8x + 16) + 3 = 2x^2 - 16x + 32 + 3 = \boxed{2x^2 - 16x + 35}$
- $\boxed{3(x+2)^2 + 1} = 3(x^2 + 4x + 4) + 1 = 3x^2 + 12x + 12 + 1 = \boxed{3x^2 + 12x + 13}$
- $\boxed{-(x-4)^2 + 2} = -(x^2 - 8x + 16) + 2 = -x^2 + 8x - 16 + 4 = \boxed{-x^2 + 8x - 14}$
- $\boxed{2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}} = 2\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} = 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{2x^2 - 2x}$

Exercice 4:

1. On a : $2(x+1)^2 + 3 = 2(x^2 + 2x + 1) + 3 = 2x^2 + 4x + 2 + 3 = f(x)$
$\boxed{\text{La forme canonique de } f \text{ est } 2(x+1)^2 + 3.}$
2. Comme 2 est un nombre positif on a :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	3	$\nearrow$	

Exercice 5:

Les fonctions sont données sous forme canonique donc il suffit de connaitre son cours. Si jamais on ne se souvient plus du cours on peut toujours dériver les fonctions et étudier le signe de la dérivée mais c'est plus long...

1.

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-3	$\nearrow$	

2.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g(x)$		$\nearrow$	-2	$\searrow$	

3.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h(x)$		$\nearrow$	-1	$\searrow$	

4.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$k(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Exercice 6:

<u>Méthode :</u> on doit ici trouver les coefficients α, β et γ de la forme canonique. L'énoncé ne nous donne que deux choix pour la valeur de α, pour choisir la bonne il suffit de regarder le « sens » de la parabole. Les valeurs de β et γ se lisent sur le graphique au sommet de la parabole.

1. $f(x) = -(x+1)^2 - 1$
2. $g(x) = -x^2 + 2$
3. $h(x) = (x+2)^2$
4. $k(x) = (x-1)^2 + 1$

Exercice 7:

Dans certains cas seul le résultat final est donné. Vous devez toujours rédiger au minimum comme pour la première question.

1. $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = 4 - 4 = 0$.

   L'équation admet une unique solution $x_0 = \dfrac{-2}{2 \times (-1)} = \dfrac{-2}{-2} = 1$.

   $\boxed{\mathcal{S} = \{1\}}$
2. $\Delta = 9$, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{2}; 2\right\}}$
3. $\Delta = 5$, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}}$
4. $\Delta = -4$, $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$

5. $\Delta = \dfrac{1}{4}$, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{1}{12}; -\dfrac{1}{4}\right\}}$
6. *Il est plus facile de manipuler des fractions que des chiffres à virgule...*

$$0,25x^2 + 0,75x + 0,5 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$$

   $\Delta = 1$, $\boxed{\mathcal{S} = \{-2; -1\}}$
7. $x^2 = 4x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0$
   $\Delta = 20$, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{2 + \sqrt{5}; 2 - \sqrt{5}\right\}}$
8. $(x+1)^2 - 2 = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 2 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 = 0$
   $\Delta = 0$, $\boxed{\mathcal{S} = \{1\}}$
9. $\Delta = 28$, $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{-2 + \sqrt{7}}{\sqrt{3}}; \dfrac{-2 - \sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right\}}$

Exercice 8:

1. $x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$. Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}.}$
2. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.
   $(x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -2$.
   Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{-2; 1\}.}$
3. $x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4$. Il n'existe aucun réel donc le carré est négatif donc $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset.}$
4. On reconnait ici une identité remarquable.

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

   Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{-2\}.}$
5.
$$\begin{aligned} & x(x+1) + x(x-2) = 0 \\ \Leftrightarrow & x[(x+1) + (x-2)] = 0 \\ \Leftrightarrow & x(2x-1) = 0 \\ \Leftrightarrow & x = 0 \text{ ou } 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{2}; 0\right\}.}$
6.
$$\begin{aligned} & (x-1)^2 = 2(x-1) \\ \Leftrightarrow & (x-1)^2 - 2(x-1) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-1)(x-1-2) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3 \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{1; 3\}.}$

Exercice 9:

1. Il y a une factorisation par x qui saute aux yeux donc il n'est pas astucieux d'utiliser le discriminant.

$$-x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(-x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } -x-2=0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -2$$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{-2; 0\}.}$

2. Pas de factorisation évidente donc il semble plus astucieux de développer puis d'utiliser le discriminant.

$$2(x-1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 2x + 1) - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 2 = 0$$

$\Delta = 16+16 = 32 > 0$. L'équation admet donc deux solutions $x_1 = \dfrac{4+4\sqrt{2}}{4} = 1+\sqrt{2}$ et $x_2 = 1-\sqrt{2}$.

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\}.}$

3. Factorisation par x, donc pas de discriminant.

$$x(x+3) = 3x \Leftrightarrow x(x+3) - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x+3-3) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{0\}.}$

4. Pas de factorisation évidente donc utilisation du discriminant.

$$2(x+1)^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow 2(x^2 + 2x + 1) - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0$$

$\Delta = 16-4 = 12$. L'équation admet donc deux solutions $x_1 = \dfrac{-4+2\sqrt{3}}{2} = -2+\sqrt{3}$ et $x_2 = -2-\sqrt{3}$.

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{-2-\sqrt{3}; -2+\sqrt{3}\}.}$

Exercice 10:

<u>*Méthode :*</u> *afin de donner la forme factorisée d'une fonction f il faut commencer par résoudre l'équation $f(x) = 0$, puis il faut connaitre son cours...*

Pour la première fonction la rédaction sera détaillée, ensuite seul le résultat est donné.

1. Commençons par résoudre, à l'aide du discriminant, l'équation $f(x) = 0$.

On a $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 > 0$. L'équation admet donc deux solutions $x_1 = \dfrac{-1+5}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-1-5}{2} = -3$.

Donc f admet une forme factorisée qui est $\boxed{f(x) = (x-2)(x+3)}$.

2. $\boxed{g(x) = 2(x-1)\left(x + \dfrac{11}{2}\right)}$
3. $\boxed{h \text{ n'admet pas de forme factorisée.}}$
4. $\boxed{k(x) = 9\left(x + \dfrac{1}{3}\right)^2}$
5. $\boxed{\ell(x) = 3(x-4)(x-1)}$
6. $\boxed{m(x) = 2(x-4)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)}$
7. $\boxed{a(x) = 5\left(x - \dfrac{1}{5}\right)^2}$
8. $\boxed{b(x) = (x-2)(x+2)}$

Exercice 11:

<u>*Méthode :*</u> *Afin de dresser le tableau de signe d'une fonction polynôme de degré 2 f, il faut tout d'abord résoudre l'équation $f(x) = 0$ puis mettre la fonction sous forme factorisée si cela est possible. Si f n'admet pas de forme factorisée alors un seul signe dans le tableau, le signe du coefficient de x^2.*

Si f admet une forme factorisée de la forme $a(x - x_0)^2$, alors toujours un seul signe dans le tableau, le signe du coefficient de x^2, mais il faut aussi mettre dans le tableau la valeur x_0 avec une barre et un zéro en dessous.

Si f admet une forme factorisée de la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$ alors deux possibilités s'offrent à vous. Soit vous connaissez votre cours par cœur et vous donnez le tableau de signe, soit vous faites un ligne pour le signe de a, une pour le signe de $x - x_1$ et une pour le signe de $x - x_2$ puis vous en déduisez le signe de f grâce à la règle des signes dans un produit.

1. Forme factorisée $f(x) = (x - 1)(x - 4)$.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. L'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solutions.

x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	

3. Forme factorisée : $h(x) = 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$.

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$+$	

4. Forme factorisée : $k(x) = -\left(x - \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
-1		$-$		$-$		$-$	
$x - \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$k(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 12:

Méthode : Si ça n'est pas le cas, on commence par se ramener à une inéquation de la forme $f(x) < 0$, $f(x) \leqslant 0$, $f(x) > 0$, ou $f(x) \geqslant 0$. Si f est une fonction polynôme de degré 2 on dresse le tableau de signes de f puis on « lit » la solution de l'inéquation dans le tableau.

La rédaction des question 2 à 10 est très succincte et ne serait pas suffisante pour un devoir maison ou sur table.

1. Dressons le tableau de signe de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 8x + 12$. Pour cela on doit résoudre l'équation $x^2 - 8x + 12 = 0$. On a $\Delta = 64 - 48 = 16 > 0$. On a donc deux solutions qui sont $x_1 = \dfrac{8-4}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{8+4}{2} = 6$.
   On a donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		2		6		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   En conclusion les solutions de l'inéquation sont $\boxed{\mathcal{S} =]2;6[.}$
2. Tableau de signe de la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 + 2x + 8$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

   En conclusion les solutions de l'inéquation sont $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset.}$
3. Tableau de signe de la fonction f définie par $f(x) = -9x^2 + 6x - 1$:

x	$-\infty$		$1/3$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

   En conclusion les solutions de l'inéquation sont $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{3}\right\}.}$
4. Tableau de signe de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 4x + 2$:

x	$-\infty$		$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   En conclusion les solutions de l'inéquation sont $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty; 2-\sqrt{2}] \cup [2+\sqrt{2}; +\infty[.}$
5. $x^2 - x + 3 < 4 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 < 0$
   Tableau de signe de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x - 1$:

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   En conclusion les solutions de l'inéquation sont $\boxed{\mathcal{S} = \left]\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right[.}$

6. $-x^2+2x+1 \leqslant x^2 \Leftrightarrow -2x^2+2x+1 \leqslant 0$
Tableau de signe de la fonction f définie par $f(x) = -2x^2+2x+1$:

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

En conclusion les solutions de l'inéquation sont $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}; +\infty\right[.}$

7. $x^2+x+4 < x^2-4x+1 \Leftrightarrow x^2+x+4-x^2+4x-1 < 0 \Leftrightarrow 5x+3 < 0 \Leftrightarrow 5x < -3 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{5}$.
En conclusion les solutions de l'inéquation sont $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty; -\frac{3}{5}\right[.}$

8. $2x^2+4x-1 > x^2+2 \Leftrightarrow x^2+4x-3 > 0$
Tableau de signe de la fonction f définie par $f(x) = x^2+4x-3$:

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{7}$		$-2+\sqrt{7}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

En conclusion les solutions de l'inéquation sont $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty; -2-\sqrt{7}\right[\cup \left]-2+\sqrt{7}; +\infty\right[.}$

9. $x^2 > -2$: On sait qu'un carré est toujours positif donc tout les réels x vérifient $x^2 > -2$.
En conclusion les solutions de l'inéquation sont $\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R}.}$

10. $x^2 < 9 \Leftrightarrow x^2-9 < 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3)$
Tableau de signe de la fonction f définie par $f(x) = (x-3)(x+3)$:

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

En conclusion les solutions de l'inéquation sont $\boxed{\mathcal{S} =]-3; 3[.}$

11. Tableau de signe de la fonction f définie par $f(x) = -(x-1)(x+2)$:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
-1		$-$		$-$		$-$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

En conclusion les solutions de l'inéquation sont $\boxed{\mathcal{S} =]-2; 1[.}$

12. Tableau de signe de la fonction f définie par $f(x) = (x-2)(x-3)$:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

En conclusion les solutions de l'inéquation sont $\boxed{\mathcal{S} = [2;3].}$

13. On cherche à dresser le tableau de signe de la fonction f définie par $f(x) = (x-1)(x^2-2x-3)$. Pour cela il nous faut le signe de x^2-2x-3 que nous allons donc essayer de mettre sous forme factorisée. On va donc résoudre l'équation $x^2-2x-3=0$. On a $\Delta = 4+12 = 16 > 0$. Donc on a deux solutions : $x_1 = \dfrac{2-4}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{2+4}{2} = 3$.
Ainsi $x^2-2x-3 = (x+1)(x-3)$ et donc $f(x) = (x-1)(x+1)(x-3)$.
Le tableau de signes de f est donc :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

En conclusion les solutions de l'inéquation sont $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty;-1[\cup]1;3[.}$

14. On cherche à dresser le tableau de signe de la fonction f définie par $f(x) = (x^2+2x+8)(x^2-x-2)$. Pour cela il nous faut le signe de x^2+2x+8 et celui de x^2-2x-3. Nous allons donc essayer de mettre ces deux trinôme sous forme factorisée.
On commence par résoudre l'équation $x^2+2x+8=0$. On a $\Delta = 4-16 = -12 < 0$. Ainsi x^2+2x+8 n'a pas de forme factorisée mais on sait que ce trinôme est du signe de $a=1$ donc positif.
Résolvons maintenant l'équation $x^2-x-2=0$. On a $\Delta = 1+8 = 9$. Donc on a deux solutions : $x_1 = \dfrac{1-3}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{1+3}{2} = 2$.
Ainsi $x^2-x-2 = (x+1)(x-2)$ et donc $f(x) = (x^2+2x+8)(x+1)(x-2)$.
Le tableau de signes de f est donc :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2+2x+8		$+$		$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

En conclusion les solutions de l'inéquation sont $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[.}$

Exercice 13:

1. On a :

$$\frac{1}{x} \geqslant x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2-x}{x} \geqslant 0$$

On cherche à dresser le tableau de signe de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1-x^2-x}{x}$. Pour cela il nous faut le signe de $1-x^2-x$ que nous allons donc essayer de mettre sous forme factorisée.
On va donc résoudre l'équation $1-x^2-x=0$. On a $\Delta = 1+4 = 5 > 0$. Donc on a deux solutions : $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{-2} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
Ainsi $1-x^2-x = -\left(x - \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$ et donc $f(x) = \dfrac{-\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)}{x}$.
Le tableau de signes de f est donc :

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
-1		$-$		$-$		$-$		$-$	
$x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

En conclusion les solutions de l'inéquation sont $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left]0; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right].}$

2. On a :

$$\frac{1}{x+2} < \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} - \frac{x}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-x(x+2)}{(x+1)(x+2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2-x+1}{(x+1)(x+2)} < 0$$

On cherche à dresser le tableau de signe de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{-x^2-x+1}{(x+1)(x+2)}$. Pour cela il nous faut le signe de $-x^2-x+1$ que nous allons donc essayer de mettre sous forme factorisée.
On va donc résoudre l'équation $-x^2-x+1=0$. On a $\Delta = 1+4 = 5 > 0$. Donc on a deux solutions : $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{-2} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
Ainsi $-x^2-x+1 = -\left(x - \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$ et donc $f(x) = \dfrac{-\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)}{(x+1)(x+2)}$.
Le tableau de signes de f est donc :

x	$-\infty$		-2		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		-1		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
-1		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

En conclusion les solutions de l'inéquation sont $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup \left]\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}; -1\right[\cup \left]\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[.}$

3. On cherche à dresser le tableau de signe de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + x + 4}$. Pour cela il nous faut le signe de $x^2 - x - 2$ et celui de $x^2 + x + 4$. Nous allons donc essayer de mettre sous forme factorisée ces deux trinômes.
   • Commençons par résoudre l'équation $x^2 - x - 2 = 0$. On a $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$. Donc on a deux solutions : $x_1 = \dfrac{1-3}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{1+3}{2} = 2$.
   Ainsi $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$.
   • On souhaite maintenant résoudre $x^2 + x + 4 = 0$. On a $\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$. Donc cette équation n'admet pas de solution et par conséquent, le trinôme $x^2 + x + 4$ est du signe du coefficient de x^2 c'est-à-dire positif.
   On a donc $f(x) = \dfrac{(x+1)(x-2)}{x^2 + x + 4}$ et le tableau de signes de f est donc :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2+x+4		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   En conclusion les solutions de l'inéquation sont $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[.}$

4. On a :

$$\frac{1}{x^2+x+2} \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+x+2} - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1-(x^2+x+2)}{x^2+x+2} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2-x-1}{x^2+x+2} \leqslant 0$$

   On cherche à dresser le tableau de signe de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{-x^2 - x - 1}{x^2 + x + 2}$. Pour cela il nous faut le signe de $-x^2 - x - 1$ et celui de $x^2 + x + 2$. Nous allons donc essayer de mettre sous forme factorisée ces deux trinômes.
   • Commençons par résoudre l'équation $-x^2 - x - 1 = 0$. On a $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. Donc cette équation n'admet pas de solution et par conséquent, le trinôme $-x^2 - x - 1$ est du signe du coefficient de x^2 c'est-à-dire négatif.
   • On souhaite maintenant résoudre $x^2 + x + 2 = 0$. On a $\Delta = 1 - 8 = -9 < 0$. Donc cette équation n'admet pas de solution et par conséquent, le trinôme $x^2 + x + 2$ est du signe du coefficient de x^2 c'est-à-dire positif.
   Le tableau de signes de f est donc :

x	$-\infty$		$+\infty$
$-x^2-x-1$		$-$	
x^2+x+2		$+$	
$f(x)$		$-$	

   En conclusion les solutions de l'inéquation sont $\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R}.}$