الأعداد العقدية

تصحيح

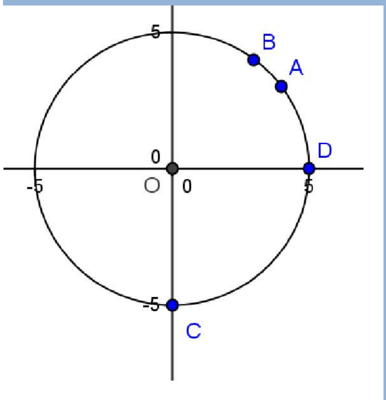
المحور الأول :

تمرين 1: بين أن النقط $A(4+3i)$ و $B(3+4i)$ و $C(-5i)$ و $D(5)$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O وشعاعها 5

تذكير : الدائرة هي مجموعة النقط M المتساوية المسافة (الشعاع : r) عن نقطة معينة I (المركز)

يعني $IM = r$

نعلم أن المسافة يتم التعبير عليها بواسطة المعيار أي أن $AB = |z_B - z_A|$



$OA = |z_A|$
$= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

و

$OB = |z_B|$
$= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

و

$OD = |z_D|$
$= \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$

و

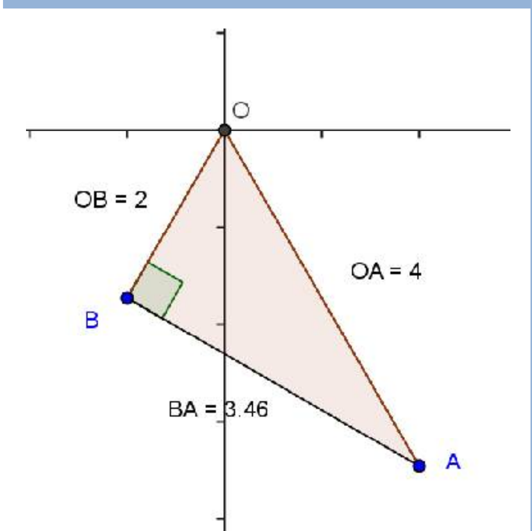
$OC = |z_C|$
$= \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5$

إذن $OA = OB = OC = OD = 5$

وبالتالي فإن النقط A و B و C و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O وشعاعها 5

تمرين 2: نعتبر النقطتين $A(2-2i\sqrt{3})$ و $B(-1-i\sqrt{3})$. بين أن المثلث OAB قائم الزاوية في B

تذكير : توظيف مبرهنة فيتاغورس



لحق المتجهة $\overrightarrow{BO}$ هو $z_O - z_B$ أي $1 + i\sqrt{3}$

ومنه فإن $BO = |1+i\sqrt{3}|$ إذن $BO = 2$

لحق المتجهة $\overrightarrow{OA}$ هو $z_A - z_O$ أي $2 - 2i\sqrt{3}$

ومنه فإن $OA = |2-2i\sqrt{3}|$ إذن $OA = 4$

لحق المتجهة $\overrightarrow{BA}$ هو $z_A - z_B$ أي $3 - i\sqrt{3}$

ومنه فإن $BA = |3-i\sqrt{3}|$ إذن $BA = \sqrt{12}$

وبالتالي فإن $BO^2 + BA^2 = OA^2$

تمرين 3:

نعتبر النقط $A(-2i)$ و $B\left(-\sqrt{3}-3i\right)$ و $C(-4i)$.

بين أن المثلث ABC متساوي الأضلاع

$$AB=\left|z_B-z_A\right|=\left|-\sqrt{3}-i\right|=2$$

$$AC=\left|z_C-z_A\right|=\left|-2i\right|=2$$

$$BC=\left|z_C-z_B\right|=\left|\sqrt{3}-i\right|=2$$

إذن $AB=BC=CA$ وبالتالي ABC مثلث متساوي الأضلاع

تمرين 4:

نعتبر النقط $A(1-i)$ و $B\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i\right)$ و $C\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}i\right)$.

بين أن المثلث ABC متساوي الساقين في B

نبين أن $BA=BC$ أي نبين أن $\left|z_A-z_B\right|=\left|z_C-z_B\right|$

المحور الثاني :

تمرين 1:

نعتبرالنقط $A(2i)$ و $B(2)$ و $C(-i)$ و $D(2+i)$

بين أن المستقيم (AB) عمودي على (CD)

تذكير : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)=\arg\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$$\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}=\frac{1+i}{1-i}=i$$

إذن

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)=\arg(i)+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

يعني أن $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ ومنه النتيجة

تمرين 2:

نعتبر النقطتين $A\left(2-2i\sqrt{3}\right)$ و $B\left(-1-i\sqrt{3}\right)$. بين أن المثلث OAB قائم الزاوية في B

$$\frac{z_O - z_B}{z_A - z_B} = \frac{1+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

إذن

$$\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BO}\right) = \arg\left(i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 2k\pi \qquad \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$
$$= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

ومنه النتيجة

تمرين 3:

نعتبر النقط $M\left(i\right)$ و $N\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$ و $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$.

بين أن المثلث MNP متساوي الأضلاع

نضع $Z = \frac{z_N - z_M}{z_P - z_M}$

$$Z = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i-i}{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i-i} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i}{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i} = \frac{\sqrt{3}-3i}{-\sqrt{3}-3i} = -\frac{\left(\sqrt{3}-3i\right)^2}{\left(\sqrt{3}+3i\right)\left(\sqrt{3}-3i\right)}$$

وبالتالي فإن

$$Z = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$= \left[1;\frac{\pi}{3}\right]$$

إذن Z عدد عقدي معياره 1 و $\frac{\pi}{3}$ عمدة له

$\frac{MN}{MP} = \frac{\left|z_N - z_M\right|}{\left|z_P - z_M\right|} = \left|\frac{z_N - z_M}{z_P - z_M}\right| = \left|Z\right| = 1$ ومنه فإن $MN = MP$

وبالتالي فإن المثلث MNP متساوي الساقين في M

وبما أن

$$\left(\overrightarrow{MP};\overrightarrow{MN}\right)=\arg Z+2k\pi \quad / \quad (k\in\mathbb{Z})$$
$$=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad / \quad (k\in\mathbb{Z})$$

وهذا يعني أن المثلث MNP متساوي الأضلاع

<u>تمرين 4:</u>

نعتبر النقط $A(1)$ و $B(i)$ و $C(1+2i)$ و $D(2+i)$

بين أن الرباعي $ABCD$ مربع

<u>تذكير :</u>

$ABCD$ مربع : متوازي أضلاع و ضلعان متتابعان متقايسان ومتعامدان

أو متوازي أضلاع قطراه متقايسان و متعامدان

$ABCD$ متوازي أضلاع : نبين أن $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ (مثلا) أو نبين أن للقطرين نفس المنتصف

لحق المتجهة $\overrightarrow{AD}$ هو $z_D-z_A=1+i$

و لحق المتجهة $\overrightarrow{BC}$ هو $z_C-z_B=1+i$

بما أن $z_D-z_A=z_C-z_B$ فإن $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ وبالتالي فأن $ABCD$ متوازي أضلاع

$$\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{1+i}{1-i}=i$$

$$\frac{BA}{BC}=\frac{|z_A-z_B|}{|z_C-z_B|}=\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right|=|i|=1$$ ومنه فإن $BA=BC$

$$\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=\arg i+2k\pi \quad / \quad (k\in\mathbb{Z})$$
$$=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad / \quad (k\in\mathbb{Z})$$

إذن $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BC}$