

المعيار والعمدة

ليكن z عددا عقديا ($z \in \mathbb{C}$)

نضع $z = a + ib$ حيث a و b عدنان حقيقيان ($a \in \mathbb{R}$ و $b \in \mathbb{R}$)

$$(1) \quad \text{معيار } z \text{ هو العدد الحقيقي } \sqrt{a^2 + b^2} : \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

أمثلة:

$$|4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$|-2 + 4i| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$|1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

(2) لحساب عمدة z ($z \neq 0$) نقوم أولا بحساب المعيار ثم نعمل:

$$z = 1 + i\sqrt{3}$$

$$|z| = 2 \text{ لدينا}$$

$$\begin{aligned} z = 1 + i\sqrt{3} &= 2 \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}$$

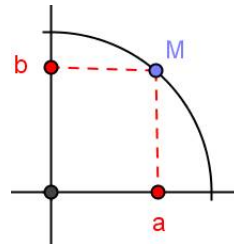
$$\text{نعلم أن } \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\text{إذن عمدة } z \text{ ل } \frac{\pi}{3} \text{ ونكتب } \arg z = \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

(3) سأطرق إلى جميع الحالات التي تصادف في التمارين مستعينا بالجدول أعلاه ومستعملا الدائرة المثلثية :

أولا: a و b عدنان حقيقيان موجبان : النقطة $M(z)$ توجد في المربع الأول



$$z = 2 + 2i$$

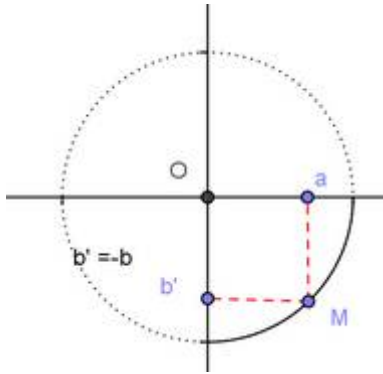
$$|z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ لدينا}$$

$$z = 2 + 2i = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} \text{ نعلم أن}$$

$$\arg z \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ ونكتب } z \text{ عمدة ل } \frac{\pi}{4} \text{ إذن}$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



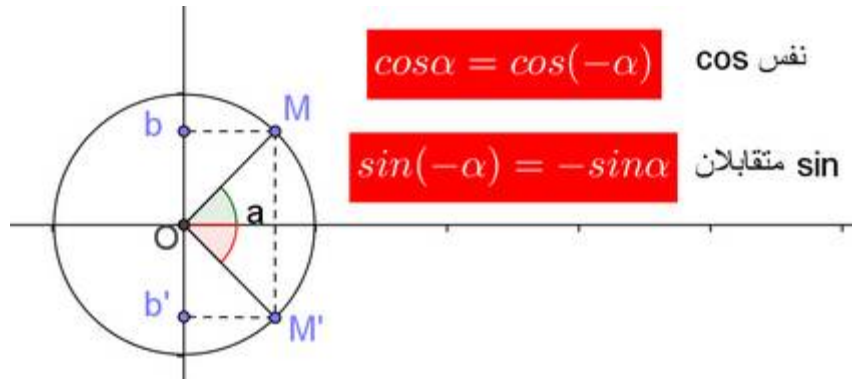
ثانياً : النقطة $M(z)$ توجد في المربع الرابع

$$z = 2\sqrt{3} - 2i$$

$$|z| = 4$$

$$z = 2\sqrt{3} - 2i = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ و } \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \text{ نعلم أن}$$



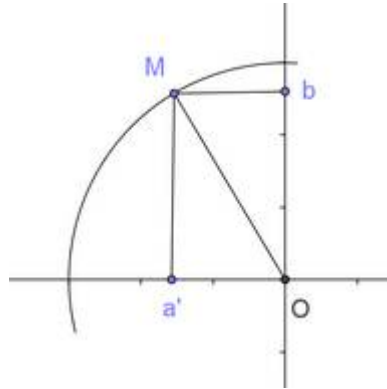
$$\cos \alpha = \cos(-\alpha) \text{ نفس } \cos$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha \text{ sin متقابلان}$$

$$\arg z \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi] \text{ ونكتب } z \text{ عمدة ل } -\frac{\pi}{6} \text{ وبالتالي إذن } \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \text{ و } \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \text{ إذن}$$

ثالثاً: $z = -a + ib$ النقطة $M(z)$ توجد في المربع الثاني

مثال: $z = -3 + 3i$



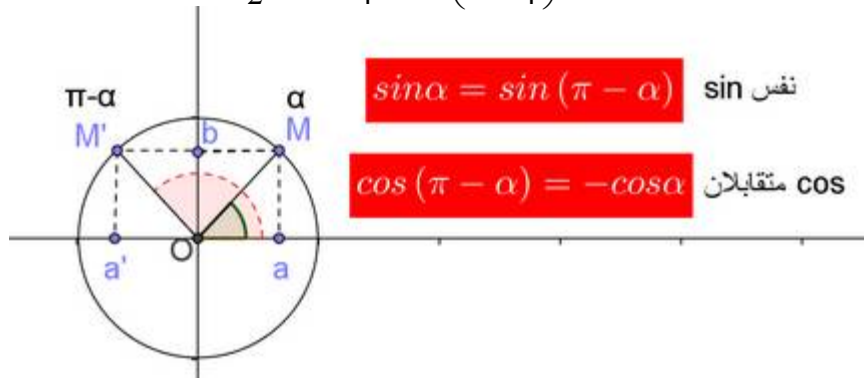
$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$z = -3 + 3i = 3\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

نعلم أن $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} = -\cos \frac{\pi}{4} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) \text{ و}$$



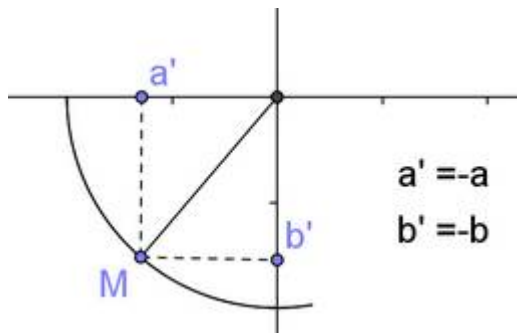
وبالتالي فإن

$$z = 3\sqrt{2} \left(\cos \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$\arg z = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

رابعاً $z = -a - ib$

مثال:

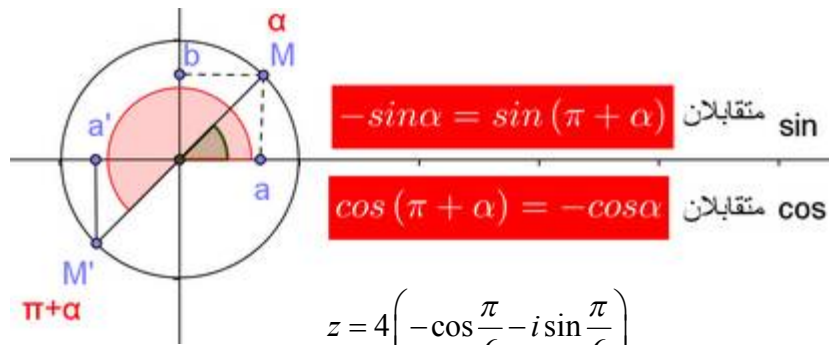


$$z = -2\sqrt{3} - 2i$$

$$|z| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4$$

$$z = 4 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)$$

نعلم أن $-\frac{1}{2} = -\sin \frac{\pi}{6}$ و $-\frac{\sqrt{3}}{2} = -\cos \frac{\pi}{6}$



$$z = 4 \left(-\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= 4 \left(\cos \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) \right)$$

$$= 4 \left(\cos \left(\frac{7\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{6} \right) \right)$$

$$\arg z \equiv \frac{7\pi}{6} [2\pi]$$

