

الأعداد العقدية

تمرين 1

$$z_1 = 2\sqrt{6}(1+i) \quad \text{نعتبر العقديين}$$

$$z_2 = \sqrt{2}(1+i\sqrt{3})$$

1. حدد الشكل المثلثي ل z_1 و z_2 .
2. حدد الشكل الجبري ل $z = \frac{z_1}{z_2}$.
3. حدد الشكل المثلثي ل z .
4. استنتج قيم $\sin(\frac{\pi}{12})$ و $\cos(\frac{\pi}{12})$.

تمرين 2

ليكن z عقدي معياره 1 و مخالف ل 1

$$\text{نضع } u = i \frac{1+z}{1-z}$$

1. بين أن $u \in \mathbb{R}$.
2. نضع $\theta = \arg(z)$. أكتب u بدلالة θ .

تمرين 3

حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث تكون النقط $A(1)$ و $M(z)$ و $N(z^3)$ مستقيمة.

تمرين 4

ليكن a و b عقديين معياريهما 1 و مختلفين.

$$\text{بين أن } \forall z \in \mathbb{C} \quad \frac{z+abz-(a+b)}{a-b} \in i\mathbb{R}$$

تمرين 5

نعتبر المعادلة التالية

$$(E) \quad z^3 - (5+7i)z^2 + (25i-4)z + 30 - 12i = 0$$

1. بين أن (E) تقبل حلا حقيقيا z_1 وحلا تخيليا صرفا z_2 .
2. حدد الحل الثالث z_3 .
3. بين أن صور الجذور رؤوس مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية.
4. حل في \mathbb{C} المعادلة

$$(E') \quad z^3 - (5-7i)z^2 - (25i+4)z + 30 + 12i = 0$$

تمرين 6

حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون العقدي $u = \frac{z-1-i}{z+1}$ تخيليا صرفا.

تمرين 7

حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون العقدي $u = \frac{z+1}{z-2i}$ حقيقيا.

تمرين 8

a) $u = 1 + \sin(\theta) + i \cos(\theta) : \theta \in [0, 2\pi[$

b) $u = 1 + i \tan(\theta) : \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

c) $u = e^{i\theta} + e^{i\theta'} : (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$

d) $u = 1 - \cos(x) + i \sin(x) : x \in]-\pi, \pi]$

حدد عمدة و معيار العقدي u في الحالات التالية

تمرين 9

حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث

1. $|z - 2 - 3i| = |z - 1 - i| = |z - 4i|$

2. $\left| \frac{z+1}{z-1} \right| = 1$

3. $\left| \frac{z+1}{z-1} \right| = \sqrt{2}$

4. $\left| \frac{z+2i}{z-i} \right| = 2$

5. $iz^2 - 2\bar{z} + 2 - i = 0$

6. $z^2 - a^2 = \bar{z}^2 - \bar{a}^2$

تمرين 10

حل في \mathbb{C} المعادلة التالية $z^6 + z^3(2i-1) - 1 - i = 0$.

تمرين 11

1. حدد الجدرين المربعين ل $-2 - 2i\sqrt{3}$.

2. حل في \mathbb{C} المعادلة التالية $(E) : z^2 - (3+i\sqrt{3})z + 2(1+i\sqrt{3}) = 0$

3. حدد الشكل الجبري ثم المثلثي للعقدي $u = (\bar{z}_1)^2 + (\bar{z}_2)^2$

حيث z_1 و z_2 جذري المعادلة (E) .

4. استنتج أن u^{2001} عدد سالب

5. نعتبر في المستوى العقدي المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ النقط $A(2)$ و $B(1+i\sqrt{3})$

و $C(3+i\sqrt{3})$ بين أن (ABC) مثلث متساوي الأضلاع.

تمرين 12

نعتبر المعادلة التالية $(E) : z^2 - (1-i)z + 4i = 0$.

1. حدد الجدرين المربعين ل $-18i$ جبريا و مثلثيا

2. حل (E)

3. لتكن $A(z_1)$ و $B(z_2)$ صور الجذور

أ - أحسب $\frac{z_1}{z_2}$

ب - حدد طبيعة المثلث (OAB)

تمرين 13

نعتبر الحدودية $P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z - 8i$

1. $P(2i)$

2. حل $P(z) = 0$

3. اعط الشكل المثلثي للجذور

4. نعتبر النقط $A(2i)$ و $B(\sqrt{3}+i)$ و $C(\sqrt{3}-i)$ بين أن $OABC$ معين.

تمرين 14

نعتبر الحدودية $P(z) = z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 - 8i(1+i)z - 5$

1. بين أن $P(z) = 0$ تقبل جدرا حقيقيا و جدرا تخيليا صرفا.

2. حل $P(z) = 0$

3. نعتبر النقط $A(1)$ و $B(i)$ و $C(1+2i)$ و $D(i+2)$ بين أن $ABCD$ مربع .

تمرين 15

نعتبر الحدودية $P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z - 8i$

1. $P(2i)$

2. حل $P(z) = 0$

3. نعتبر النقط $A(2i)$ و $B(1+i)$ و $C(1+3i)$.

أ - أكتب مثلثا و جبريا $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$

ب - حدد طبيعة المثلث (ABC)

تمرين 16

حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون العقدي $u = \frac{z-2i}{z^2}$ تخيليا صرفا .

تمرين 17

حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون العقدي $u = \frac{z^2 - z - 2}{z - 1}$ حقيقيا.

تمرين 18

حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون العقدي $u = \frac{1-iz}{1+iz}$ حقيقيا.

تمرين 19

نضع التطبيق f المعروف من \mathbb{C} نحو \mathbb{C} ب $f(z) = \frac{iz^2}{z-1-i}$

1. حدد Df

2. حدد (D) مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $|f(z)| = |z-1-i|$

3. حل في \mathbb{C} المعادلة التالية $f(z) = -1$ ليكن a و b جديها بحيث $\text{Re}(a) > \text{Re}(b)$

4. ليكن c بحيث $c - a = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(b - a)$

ماهي طبيعة (ABC)

تمرين 20

نعتبر المعادلة التالية

$$(E) z^3 - (6i+4)z^2 + (16i-4)z + 16 - 8i = 0$$

5. بين أن (E) تقبل حلا حقيقيا z_1 وحلا تخيليا صرفا z_2 .

6. حدد الحل الثالث z_3 .

7. بين أن صور الجذور رؤوس مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية.

تمرين 21

حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث تكون النقط التي الحاقها على التوالي z و z و jz مستقيمية .

تمرين 22

$$\text{حل في } \mathbb{C} \text{ النظمة } \begin{cases} |z-1| \leq 1 \\ |z+1| \leq 1 \end{cases}$$

تمرين 23

ليكن m عقديا معياره $\sqrt{2}$ و عمدته α
نعتبر المعادلة التالية

$$(E) \quad mz^2 - 2z + \bar{m} = 0$$

1. حل (E) z' و z'' حلها
2. أكتب z' و z'' و $\frac{z'}{z''}$ على الشكل المثلثي .
3. نعتبر في المستوى العقدي المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ النقط $A(z')$ و $B(z'')$ و $C(z'+z'')$ بين أن $(OACB)$ مربع.

تمرين 24

$$\forall a, b \in \mathbb{C} : |a| = 1 \text{ ou } |b| = 1 \Rightarrow \left| \frac{a-b}{1-ab} \right| = 1 \quad \text{بين ان}$$

تمرين 25

حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون O مركز ثقل المثلث (ABC) حيث $A(z)$ و $B(z^2)$ و $C(z^3)$ مستقيمة .

تمرين 26

حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث تكون النقط التي الحاقها على التوالي $1+i$ و $z+i$ و $1+iz$ مستقيمة .

تمرين 27

حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث تكون النقط التي الحاقها على التوالي z و z^2 و z^5 مستقيمة .

تمرين 28

حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث تكون النقط التي الحاقها على التوالي 1 و z و z^2 و z^3 متداورة .

تمرين 29

حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث تكون النقط التي الحاقها على التوالي i و z و iz رؤوس مثلث متساوي الأضلاع

تمرين 30

ليكن $a \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}^*$

$$1. \text{ حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة } (z+1)^n = e^{i2na}$$

$$2. \text{ عمل } (z+1)^n - e^{i2na}$$

$$3. \text{ بين أن } (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} z_k = 1 - e^{i2na}$$

$$4. \text{ استنتج قيمة الجداء } \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$$

تمرين 31

1. حدد الجذور المربعة ل $7+24i$

2. حل المعادلة $2z^3 - 5iz^2 + (2-3i)z + 3i - 9 = 0$ علما أن أحد جذورها تخيليا صرفا .

تمرين 32

أنشئ المربع ذو القطر $[O, A]$ حيث $A(2+i)$

تمرين 33

حل المعادلات

$$1. z^3 = 8$$

$$2. z^7 = \bar{z}$$

$$z^{10} + z^5 + 1 = 0 \quad 3.$$

تمرين 34

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$$

$$\Sigma_n = \sum_{k=0}^n \frac{\sin(kx)}{\cos^k(x)}$$

بسط المجاميع التالية

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

كون $S_n + i\Sigma_n$

تمرين 35

$$E_n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cos(kx)$$

بسط

تمرين 36

حل المعادلة $z^3 - (3+4i)z^2 - 4(1-3i)z + 12 = 0$ علما أن أحد جذورها تخيليا صرفا .

تمرين 37

1. حل $z^2 - (3+i)z + 4 = 0$ في \mathbb{C}

$$a = 1+i$$

$$b = \sqrt{3} - i$$

أعط الشكل المتثلثي ل a و b و $\frac{a}{b}$

3. نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ النقط $A_n(a^n)$ و

$$n \in \mathbb{N}^* \quad B_n(b^n) \quad \text{بين أن } A_n \text{ و } B_n \text{ مستقيمية} \Leftrightarrow n = 12k$$

تمرين 38

ليكن z عقديا معياره 1 و مخالف ل1

$$u = i \frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R}$$

بين أن

تمرين 39

حدد مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها العقدي $u = \left(\frac{z-1-i}{iz+1}\right)^2$ حقيقيا.

تمرين 40

1. حل في المعادلة $z^5 + 1 = 0$

2. عمل $z^5 + 1$

3. استنتج $\sin \frac{\pi}{5}$ و $\cos \frac{\pi}{5}$

4. حل المعادلة $(u-1)^5 = -(u+1)^5$

تمرين 41

1. حل في المعادلة $z^7 + 1 = 0$

2. عمل $z^7 + 1$

$$\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} = -\frac{1}{2} \quad \text{3. استنتج}$$

$$\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} = -\frac{1}{8}$$

تمرين 42

$$1. \text{ حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة } \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1+i$$

2. بين أن صور الجذور نقط متداورة

تمرين 43

$$1. \text{ حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة } z^3 + 2z^2 + 4(-1+i)z + 16(1+i) = 0 \text{ علما أن أحد الجذور حقيقي}$$

2. بين أن صور الجذور رؤوس مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية

تمرين 44

$$1) z^8 + 2z^4 + 4 = 0$$

$$2) z^8 = \frac{1-i}{\sqrt{3}-i} \quad \text{حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلات}$$

تمرين 45

$$\text{نعتبر الحدودية } P(z) = z^3 - 2z^2 + 2(2-3i)z - 20$$

$$5. P(2i)$$

$$6. \text{ حل } P(z) = 0$$

تمرين 46

$$P(\theta) = 4 \cos^2(\theta) \sin(2\theta) - 4 \sin^2(\theta) \cos(2\theta)$$

$$P(\theta) = \sin^5(x)$$

$$P(\theta) = \cos^5(x)$$

$$P(\theta) =$$

أخطط الحد وديات

تمرين 47

نعتبر المعادلة التالية

$$(E) z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$$

1. بين أن (E) وحلا تخيليا صرفا.

2. حل (E)

3. طبيعة المثلث الذي رؤوسه صور الجذور

تمرين 48

نعتبر المعادلة التالية

$$(E) z^3 + 2(1+i)z^2 + 2(1+2i)z + 4i = 0$$

1. بين أن (E) حلا تخيليا صرفا.

2. حل (E)

3. أعط الشكل المثالي للجذور

تمرين 49

نعتبر المعادلة التالية

$$(E) z^3 + 9iz^2 + 2(6i-11)z - 3(12+4i) = 0$$

1. بين أن (E) حلا تخيليا صرفا و حلا حقيقيا.

2. حل (E)

3. بين أن صور الجذور نقط مستقيمية

تمرين 50

نعتبر المعادلة التالية

$$(E) \quad z^3 + (5i-6)z^2 + (9-24i)z + 18 + 13i = 0$$

4. تحقق أن $-i$ حلال (E) .

5. حل (E)

6. بين أن صور الجذور رؤوس مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية

تمرين 51

1. حل المعادلة $z^3 + 2z^2 + 4z + 8 = 0$ علما أن أحد جذورها تخيليا صرفا

2. حل المعادلة $u^6 + 2u^4 + 4u^2 + 8 = 0$ بين أن صور الجذور نقط متداورة

تمرين 52

حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون العقدي $u = \frac{1+z}{z}$ تخيليا صرفا.

تمرين 53

عمل $z^6 - 27$

$z^4 + 1$

تمرين 54

$$z = e^{\frac{i2\pi}{7}}$$

$$S = z + z^2 + z^4$$

$$T = z^3 + z^5 + z^6$$

1. بين أن S و T مترافقين و أن $\text{Im}(S) > 0$

2. أحسب $S+T$ و ST ثم S و T

تمرين 55

نعتبر المعادلة التالية

$$(E) \quad z^4 + -6z^3 + 23z^2 - 34z + 26 = 0$$

7. تحقق أن $1+i$ حلال (E) .

8. حل (E)

تمرين 56

1. احسب المجموع $S(z) = 1 + z^2 + z^4 + \dots + z^{2n-2}$ $z \in \mathbb{C}$

2. حل في \mathbb{C} $z^{2n} - 1 = 0$

3. بين أن $S(z) = \prod_{k=1}^{n-1} z^2 - 2z \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1$

4. باعتبار $S(1)$ بين أن $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$

5. باعتبار $S(i)$ أحسب $\prod_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{n}$

تمرين 57

ليكن $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ و $\alpha \in \mathbb{N}^*$ و $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)^n = \frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha} \quad \text{حل المعادلة}$$

تمرين 58

$$\overline{z^{n-1}} = z \quad \text{حل في المعادلة}$$

$$n = 1$$

$$n = 2 \quad \text{فرق الحالات}$$

$$n > 2$$

تمرين 59

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0 \Leftrightarrow \text{متساوي الأضلاع } ABC \quad \text{بين أن}$$

تمرين 60

$$u = \frac{z+1}{z-1} \quad \text{حدد مجموعة النقط } M(z) \text{ بحيث يكون العقدي}$$

1. تخيليا صرفا.

2. حقيقيا

تمرين 61

حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث تكون النقط التي الحاقها على التوالي z و 1 و $z^2 + 1$ مستقيمية .

تمرين 62

$$z^2 - (5-14i)z - 2(5i+12) = 0$$

حل المعادلة

تمرين 63

$$z^3 - (1+6i)z^2 - 17z + 17 + 6i = 0$$

حل المعادلة

بين أن صور الجذور رؤوس مثلث متساوي الساقين و قوائم الزاوية