الدوال اللوغاريتمية

تمرين: 1

1 أ - حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $x^2+4x-5=0$

ب - حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة: $\ln(x^2+5)=\ln(x+2)+\ln(2x)$

2 حل في المجال $]0;+\infty[$ المتراجحة: $\ln(x)+\ln(x+1)\geqslant \ln(x^2+1)$

تمرين: 2

أحسب النهايات التالية:

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-2x+\ln(x)$ **2** $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ **3** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)$ **4** $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{\ln(2x)}{2x-1}$

5 $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln^2(x)-\ln(x)+1$ **6** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\ln(x)}$ **7** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$ **8** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \sqrt{x}\ln(x)$

9 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x\ln(x)}$ **10** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} -x+\dfrac{\ln(x)}{x}$ **11** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} 1+x\ln x-(\ln x)^2$ **12** $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+x\ln x-(\ln x)^2$

تمرين: 3

$I-$ نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي: $g(x)=x-2\ln x$

1 أ - أحسب $g'(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$

ب - بين أن g تناقصية على $]0,2]$ و تزايدية على $[2;+\infty[$

2 استنتج أن: $g(x)>0$ لكل x من $]0;+\infty[$ (لاحظ أن $g(2)>0$)

$II-$ نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي: $f(x)=x-(\ln x)^2$ و $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1 أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$ و أول النتيجة هندسيا.

2 أ - بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$ (يمكنك وضع $t=\sqrt{x}$)

ب - استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ وأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=1$ (لاحظ أن: $f(x)=x\left(1-\dfrac{(\ln x)^2}{x}\right)$)

ج - احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ ثم استنتج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$.

د - بين أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يوجد تحت المستقيم (Δ)

3 أ - بين أن $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ و بين أن f تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$

ب - ضع جدول تغيرات الدالة f

ج - بين أن $y=x$ هي معادلة ديكارتية لمماس المنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة التي أفصولها 1

4 بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;+\infty[$ و أن $\dfrac{1}{e}<\alpha<\dfrac{1}{2}$ (نقبل أن $(\ln 2)^2<\dfrac{1}{2}$)

5 أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى $(\mathscr{C})$ في المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

(نقبل أن $I(e,e-1)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathscr{C})$ و نأخذ $e\approx2.7$)

$III-$ نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي: $u_0=2$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1 بين أن $1\leqslant u_n\leqslant 2$ لكل n من $\mathbb{N}$ (يمكنك استعمال نتيجة السؤال $II-3$) - أ)

2 بين أن المتتالية (u_n) تناقصية.

3 استنتج أن (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها.

■ تمرين : 4

I− نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي: $g(x)=x-1-\ln x$

1 أحسب $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2 أدرس تغيرات الدالة g و استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II− نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي: $\begin{cases} f(x)=x^2-2x\ln x \quad ; \quad x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

وليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ بحيث: $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$

1 بين أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2 بين أن الدالة f متصلة في 0 .

3 أ ـ أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 ثم اعط تأويلا هندسيا.

ب ـ بين أن $f'(x)=2g(x)$; $(\forall x>0)$ ثم اعط جدول تغيرات الدالة f .

4 أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathscr{C})$.

5 أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

■ تمرين : 5

I− نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي: $g(x)=x^2+2-2\ln x$

1 أحسب $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2 أدرس تغيرات الدالة g و أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II− نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي: $f(x)=x+\dfrac{2\ln x}{x}$

وليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ بحيث: $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$

1 أ ـ بين أن $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$ و اعط تأ ويلا هندسيا للنتيجة .

ب ـ بين أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2 بين أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$; $(\forall x>0)$ ثم اعط جدول تغيرات الدالة f .

3 بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

4 بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;+\infty[$ و أن $\dfrac{1}{e}<\alpha<1$.

5 أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.