AZIZ HALIB

Chapitre 1

Généralités sur les nombres

1. Notation $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ (Nommer les nombres)

Nombre vient du latin « Numerus »

Activité A1 (Voir Annexe 1)

1.1 Les entiers naturels (Le $\mathbb{N}$ vient de l'italien « Naturale »)

L'ensemble des nombres naturels se nomme $\mathbb{N}$ et représente l'ensemble des nombres entiers positifs.

$$\mathbb{N} = \{ 0 ; 1; 2; 3; ... \}$$

Rq 1 :
Cet ensemble est stable pour l'addition (ie Si on additionne deux entiers naturels on obtient un entier naturel) mais n'est pas stable pour la soustraction.

Si $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N} \Rightarrow a + b \in \mathbb{N}$
Si $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N} \Rightarrow a - b$ n'appartient pas forcement à $\mathbb{N}$

Exemples : $2 + 3 = 5 \in \mathbb{N}$ / $2 - 3 \notin \mathbb{N}$

Rq 2 :
Cet ensemble est stable pour la multiplication (ie Si on additionne deux entiers naturels on obtient un entier naturel) mais n'est pas stable pour la division.

Si $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N} \Rightarrow a \times b \in \mathbb{N}$
Si $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N} \Rightarrow a \div b$ n'appartient pas forcement à $\mathbb{N}$

Exemples : $3 \times 2 = 6 \in \mathbb{N}$ / $3 \div 2 \notin \mathbb{N}$

Nous allons essayer de construire un ensemble plus stable ...

1.2 Les entiers relatifs (Le $\mathbb{Z}$ vient de l'allemand « Zahl »)

L'ensemble des nombres relatifs se nomme $\mathbb{Z}$ et représente l'ensemble des nombres entiers positifs, négatifs ou neutre.

$$\mathbb{Z} = \{ \ ... ;-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3 ; ... \}$$

Rq 1 :
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ car tous les entiers naturels sont des entiers relatifs.

Rq 2 :
Cet ensemble est stable par l'addition et la soustraction (ie Si on additionne ou soustrait deux entiers relatifs, on obtient un entier relatif).

$$\text{Si } a \in \mathbb{N} \text{ et } b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + b \in \mathbb{Z} \text{ et } a - b \in \mathbb{Z}$$

Exemples : $2 + 3 = 5 \in \mathbb{Z}$ / $2 - 3 = -1 \in \mathbb{Z}$

Rq 3 :
Cet ensemble est stable pour la multiplication (ie Si on additionne deux entiers naturels on obtient un entier naturel) mais n'est pas stable pour la division.

$$\text{Si } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \times b \in \mathbb{Z}$$
$$\text{Si } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \div b \text{ n'appartient pas forcement à } \mathbb{Z}$$

Exemples : $-3 \times 2 = -6 \in \mathbb{Z}$ / $-3 \div 2 \notin \mathbb{Z}$

Nous allons essayer de construire un ensemble encore plus stable ...

1.3 Les nombres Décimaux (Le $\mathbb{D}$ vient du français « Décimale »)

L'ensemble des nombres décimaux se nomme $\mathbb{D}$ et représente l'ensemble des nombres dont la partie décimale est finie (ie $2,345 \in \mathbb{D}$ et $0,33333 .... \notin \mathbb{D}$)

$$\mathbb{D} = \{ \frac{a}{10^n} \; ; a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N} \}$$

Rq 1 :

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$ car tous les entiers relatifs sont de la forme $\frac{a}{10^0}$ avec $a \in \mathbb{Z}$

Rq 2 :
Cet ensemble est stable par l'addition, la soustraction et la multiplication mais pas par la division (ie Si on additionne, soustrait ou multiplie deux nombres décimaux, on obtient un nombre décimal)

$$\text{Si } a \in \mathbb{D} \text{ et } b \in \mathbb{D} \Rightarrow a + b \in \mathbb{D} \; ; a - b \in \mathbb{D} \; ; a \times b \in \mathbb{D}$$

Exemples

$2,5 + 3,7 = 6,2 \in \mathbb{D}$; $2,5 - 3,7 = -1,2 \in \mathbb{D}$; $2,5 \times 3,7 = 9,25 \in \mathbb{D}$

alors que $1,3 \div 3,9 = 0,333 ... \notin \mathbb{D}$

Nous allons essayer de construire un ensemble encore plus stable ...

1.4 Les nombres rationnels (Le $\mathbb{Q}$ vient de l'italien « Quotiente »)

L'ensemble des nombres rationnel se nomme $\mathbb{Q}$ et représente l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction (ie quotient de deux entiers relatifs)

$$\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \text{ ; } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^* \}$$

Rq 1 :
$b \in \mathbb{Z}^*$ car on ne peut pas diviser par 0. $\mathbb{Z}^*$ est l'ensemble des entiers relatifs, privé de 0 (ie $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$)

Rq 2 :

$\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ car tous les nombres décimaux sont de la forme $\frac{a}{b}$ avec b = 10^n .

Rq 3 :
Cet ensemble est stable par l'addition, la soustraction, la multiplication et la division (ie si on additionne, soustrait, multiplie ou divise deux nombres rationnels alors le résultat est un nombre rationnel)

Si $a \in$ et $b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a + b \in \mathbb{Q}$, $a - b \in \mathbb{Q}$, $a \times b \in \mathbb{Q}$ et $a \div b \in \mathbb{Q}$

Exemples :

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{5}{15}+\frac{6}{15}=\frac{11}{15} \in \mathbb{Q} \qquad \frac{1}{3}-\frac{2}{5}=\frac{5}{15}-\frac{6}{15}=-\frac{1}{15} \in \mathbb{Q}$$

$$\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{1\times 2}{3\times 5}=\frac{2}{15} \in \mathbb{Q} \qquad \frac{1}{3}\div\frac{2}{5}=\frac{1}{3}\times\frac{5}{2}=\frac{5}{6} \in \mathbb{Q}$$

Voilà un ensemble stable pour les quatre opérations. Mais il reste quelques éléments qui ne sont pas des entiers relatifs, ni des entiers naturels, ni des nombres décimaux et pas non plus des nombres rationnels.
Exemples : π ou $\sqrt{2}$ Il nous faut donc un ensemble encore plus grand et qui contienne tous les autres ...

1.5 Les nombres réels (Le $\mathbb{R}$ vient de l'allemand « Real »)

L'ensemble des nombres réels se nomme R et repésente l'ensemble de tous les nombres précédents auquel on ajoute les nombres irrationnels (ie qui ne peuvent pas se mettre sous forme de fraction)

Théorème (A admettre) Tout nombre réel est l'abscisse d'un unique point d'une droite munie d'un repère. Cette droite est appelée « La droite réelle »

Rq :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

1.6 Pour aller plus loin.

Il reste encore des équations que l'on ne peut pas résoudre dans $\mathbb{R}$.
Par exemple celles là : $x^2 + 1 = 0$ et $x^2 = -3$.
Ces équations ont pourtant des solutions pas dans $\mathbb{R}$ mais dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes.

$$\mathbb{C} = \{ a + ib \; ; \; a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1 \}$$

A suivre en terminale ...

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Exercices (Abscisse 2nde, Magnard, éd 2004)
En classe : 2, 3 et 5 page 228
A la maison : 4 et 6 page 228

2. Nature et écriture des nombres

Activité A2 (Voir Annexe 2)

Sur la droite réelle il est facile de placer les éléments de l'ensemble $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.
C'est plus délicat pour les autres...

Exemples : Comment placer $\frac{1}{3}$ ou π ou $\sqrt{2}$ sur la drote réelle ?

Pour ça nous allons utiliser différentes écritures des nombres.

2.1 La valeur approchée

Definition : Soit $n \in \mathbb{N}$

- On appelle valeur approchée par defaut à 10^{-n} près d'un réel r tout nombre réel m tel que

$$r - 10^{-n} \leqslant m \leqslant r \quad \text{(On prendra souvent } r - 10^{-n} \text{)}$$

- On appelle valeur approchée par excès à 10^{-n} près d'un réel r tout nombre réel m tel que

$$r \leqslant m \leqslant r + 10^{-n} \quad \text{(On prendra souvent } r + 10^{-n} \text{)}$$

Exemple :

Si r = 2,35787, alors

Une valeur approchée par excès à 10^{-3} est m = 2,358

Une valeur approchée par défaut à 10^{-3} est m = 2,357

2.2 La troncature

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}$

La troncature à la précision 10^{-n} d'un nombre décimal est obtenue en ne conservant que les n premiers chiffres après la virgule.

Exemples :

Si r = 2,35787, alors

La troncature à la précision 10^{-3} est m = 2,357 (Valeur approchée par défaut)

Si r = - 2,35787, alors

La troncature à la précision 10^{-3} est m = - 2,357 (Valeur approchée par excès)

2.3 L'arrondi

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}$

L'arrondi à la précision 10^{-n} de r est le nombre décimal obtenu à partir de la troncature de r, dont le n-ième chiffre après la virgule est augmenté de 1, si le suivant est égal à 5,6,7,8 ou 9.

Exemples :

L'arrondi de r = 1,56879 à la précision de 10^{-3} est m = 1,569

L'arrondi de r = 1,56839 à la précision de 10^{-3} est m = 1,568

2.4 L'écriture scientifique

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}$

Tout réel r peut s'écrire sour la forme $\pm M.10^{n}$, où M est un nombre décimal tel que $1 \leq M < 10$. Cette écriture s'appelle l'écriture scientifique de r.

Exemples :

L'écriture scientifique de 345,78 est $3,4578 \times 10^{2}$

L'écriture scientifique de -0,0056 est $5,6 \times 10^{-3}$

Remarque :

Pour obtenir un ordre de grandeur d'un nombre décimal d :

- On l'écrit en écriture scientifique.
- On arrondi M à l'entier le plus proche.
- On conserve la puissance de 10.

Exemple :

$53,987 = 5,3987 \times 10^{1} \approx 5 \times 10^{1}$ donc 50 est un ordre de grandeur de 53,987

Exercices (Abscisse 2nde, Magnard, éd 2004)

En classe : 19, 20, 22, page 230

A la maison : 21, 23 page 230

3.Organisation des caclules

3.1 Généralités

Pour effectuer une suite de calculs numériques, il faut respecter les priorités suivantes :

1. Les calculs entre parenthèses 2. Les calculs avec opérateurs et fonctions (Opposé, Exposant, Racine carrée ...) 3. Les multiplications et divisions de gauche à droite 4. Les additions et soustractions de gauche à droite

Exemple :

$$A=6-4\times 5^2+\frac{3\times\sqrt{36}}{12}-(37-2\times 15)\times 2$$

Fiche Exercices 1

3.2 Effectuer un calcul avec des fractions

Pour effectuer une suite de calculs avec des fractions, il faut utiliser les priorités opératoires et les règles suivantes :

1. Pour additionner ou soustraire des fractions, il faut qu'elles soient au même dénominateur et utiliser les règles :

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

2. Pour multiplier des fractions, il est préférable de commencer par simplifier et ensuite d'effectuer les multiplications de la façon suivante :

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

3. Pour diviser deux fractions, il faut multiplier la première par l'inverse de la deuxième, de la façon suivante :

$$\frac{a}{b}\div\frac{x}{y}=\frac{a}{b}\times\frac{y}{x}$$

Fiche Exercices 1

3.3 Effectuer un calcul avec des racines carrées

Pour effectuer une suite de calculs avec des racines carrées, il faut utiliser les priorités opératoires et les règles suivantes :

1. $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ sont les seuls nombres qui élevés au carré donnent a. On a donc :

$$\text{Si} \quad a \geqslant 0 \quad \text{alors} \quad \sqrt{a}\times\sqrt{a}=\sqrt{a^2}=a \quad \text{et} \quad -\sqrt{a}\times(-\sqrt{a})=\sqrt{a^2}=a$$

2. a et b étant deux nombres positifs et b ≠ 0 , alors

Si a ⩾ 0 et b $\quad b>0 \quad 0 \quad \sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$ $\qquad \sqrt{a^2\times b}=a\sqrt{b}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

Fiche Exercices 1

3. Pour faire disparaître des racines carrées au dénominateur d'une fraction, on peut utiliser les deux méthodes suivantes :

$$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1\times\sqrt{a}}{\sqrt{a}\times\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a} \quad \text{ou} \quad \frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{c\times(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\times(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{c\sqrt{a}-c\sqrt{b}}{a-b}$$

Exemple :

$$\frac{2\sqrt{5}}{3-\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{5}\times(3+\sqrt{7})}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}=\frac{6\sqrt{5}+2\sqrt{35}}{3^2-\sqrt{7}^2}=\frac{6\sqrt{5}+2\sqrt{35}}{2}=3\sqrt{5}+\sqrt{35}$$

Exercice : Simplifie

$$A=\frac{3}{2+\sqrt{5}} \qquad B=\frac{5}{7-\sqrt{6}}-\frac{8}{7+\sqrt{6}} \qquad C=\frac{3+\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}}$$

3.4 Effectuer un calcul avec des puissances

Pour effectuer une suite de calculs avec des puissances, il faut utiliser les priorités opératoires et les règles suivantes :

$$a^0=1 \qquad a^1=a \qquad a^n\times a^p=a^{n+p} \qquad \frac{a^n}{a^p}=a^{n-p}=a^{n+\text{opposé}(p)}$$

$$a^n\times b^n=(ab)^n \qquad \frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n \quad \text{pour } b \neq 0$$

Exemple :

$$\frac{7\times10^3\times5\times10^{-5}}{15\times10^6\times10^{-10}}=\frac{7\times5}{3\times5}\times\frac{10^3\times10^{-5}}{10^6\times10^{-10}}=\frac{7}{3}\times\frac{10^{-2}}{10^{-4}}=\frac{7}{3}\times10^2$$

Fiche Exercices 1

3.5 Résolution des équations de base

Les équations de bases sont celles que l'on a résolu en 3ème. Les équations du premier degré (l'exposant maximal des x est 1) et les équations produits.

3.5.1 Les équations du premier degré :

- Sans fraction :

1.Développer et réduire les deux membres de l'équation.
2.Faire apparaître les x d'un côté et le reste de l'autre en utilisant des additions et des soustractions dans les deux membres.
3.Diviser les deux membres par le coefficient devant le x.
4.Conclure

Exemple :

$3(x+2)-4(3-x)=-5(3x-1)$	
$\Leftrightarrow 3x+6-12+4x=-15x+5$	On développe.
$\Leftrightarrow 7x-6=-15x+5$	On réduit.
$\Leftrightarrow 7x+15x-6=-15x+15x+5$	On ajoute 15x
$\Leftrightarrow 22x-6=5$	à chaque membre.
$\Leftrightarrow 22x-6+6=5+6$	On ajoute 6
$\Leftrightarrow 22x=11$	à chaque membre.
$\Leftrightarrow x=11\div 22=1\div 2=0{,}5$	On divise par 22.
L'ensemble solution : $\mathbf{S=\{\,0{,}5\,\}}$	

- Avec fractions :

Pour les équations avec fractions, il faut commencer par tout mettre au même dénominateur et ensuite les enlever pour trouver une équation équivalente mais cette fois sans fraction.

Exemple :

$$\frac{3}{2}x+5=\frac{5}{3}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{6}x+\frac{30}{6}=\frac{10}{6}x$$

$\Leftrightarrow \quad 9x+30=10x$ et il reste à résoudre cette équation plus simple.

Fiche Exercices 2

3.5.2 Les équations produits :

Les équations produits sont sous la forme d'un produit nul. Si un produit est nul alors l'un au moins des facteurs est nul.

Si $A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$

Exemple :

$(2x + 3)(4x - 5) = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 3 = 0$ ou $4x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow 2x = -3$ ou $4x = 5$

$\Leftrightarrow x = -3/2 = -1{,}5$ ou $x = 5/4 = 1{,}25$

L'ensemble solution : **S = { - 1,5 ; 1,25 }**

Fiche Exercices 2

4.Arithmétique

Activité A3 (Voir Annexe 3)

4.1 Vocabulaire et Critères de divisibilité

Les multiples

Si a et b sont deux entiers naturels non nuls ($a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$) , on dit que a est multiple de b si et seulement si il existe ($\exists$) $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = k \times b$

Les diviseurs

Si a et b sont des entiers naturels non nuls ($a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$), on dit que a divise b si et seulement si $\frac{b}{a}$ est un entier. On dira aussi que a est un diviseur de b.

Les critères de divisibilté

(Fiche exercices 3)

Critère de divisibilité par 2

Un nombre est divisible par 2 s'il se termine par un chiffre pair.

Critère de divisibilité par 3

Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3

Critère de divisibilité par 4

Un nombre est divisible par 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.

Critère de divisibilité par 5

Un nombre est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5.

Critère de divisibilité par 6

Un nombre est divisible par 6 s'il est divisible à la fois par 2 et par 3.

Critère de divisibilité par 7

Le nombre est divisible par 7 si et seulement si
le nombre de dizaines - le double du chiffre des unités est divisible par 7.

Critère de divisibilité par 8

Un nombre est divisible par 8 si le nombre formé par ses trois derniers chiffres est divisible par 8.

Critère de divisibilité par 9

Un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Critère de divisibilité par 10

Un nombre est divisible par 10 si le chiffre des unités est 0.

Critère de divisibilité par 11

Pour déterminer si un nombre N est divisible par 11 :
on calcule la somme A des chiffres en position impaire ;
on calcule la somme B des chiffres en position paire ;
N est divisible par 11 si et seulement si la différence A – B (ou B – A) est divisible par 11.

Mini critère :

Si un nombre de trois chiffres a son chiffre du milieu égal à la somme des deux chiffres extrêmes alors il est divisible par 11.

Critère de divisibilité par 12

Un nombre est divisible par 12 s'il est divisible par 3 et par 4.

Exercices (Abscisse 2nde, Magnard, éd 2004)

En classe : 30, 31, 33, 35, 36 page 232

A la maison : 32, 34, 37 page 232

4.2 PGCD et PPCM de deux entiers

4.2.1 PGCD de a et b :

Le PGCD de a et b est le Plus Grand Diviseur Commun de a et de b.

Si on liste tous les diviseurs de a et de b et que l'on cherche ceux qui sont communs au deux listes, alors le PGCD est le plus grand de cette liste commune. Mais cette méthode est parfois beaucoup trop longue et il est intéressant d'utiliser d'autres algorithmes comme ceux que nous avons vus en 3ème et celui que nous verrons dans la partie sur les nombres premiers.

Exemple :

Calculons le PGCD de 126 et 150

<u>Algorithme des soustractions</u>

150 – 126 = 24
126 – 24 = 102
102 – 24 = 78
78 – 24 = 54
54 – 24 = 30
30 – 24 = 6
24 – 6 = 18
18 – 6 = 12
12 – 6 = 6
6 – 6 = 0 ⇒ PGCD(150;126) = **6**

Mais dans certains cas cette méthode est encore trop longue.

<u>Algorithme d'Euclide</u> (divisions Euclidiennes)

On effectue des divisions Euclidienne successives :
$150 = 126 \times 1 + 24$
$126 = 24 \times 5 + 6$
$24 = 6 \times 3 + 0$ et on s'arrête quand le reste est 0.
⇒ PGCD (150;126) = **6**

4.2.2 PPCM de a et b :

Le PPCM de a et b est le Plus Petit Multiple Commun de a et b.

Si on liste tous les multiples de a et de b et que l'on cherche ceux qui sont communs aux deux listes, alors le PPCM est le plus petit de cette liste commune. Mais cette méthode est parfois beaucoup trop longue et il est intéressant d'utiliser la formule suivante :

PGCD × PPCM = a × b

Exercices (Déclic 2de Hachette éd 2005)
En classe : 83 page 27
A la maison : 84 page 27

4.3 Uilisation du PGCD et PPCM

4.3.1 Simplification des fractions (PGCD)

Pour obtenir une fraction irréductible, il faut diviser le numérateur et le dénominateur par le PGCD des deux.

Exemple : $\frac{150}{126}$ n'est pas irréductible. Pour la simplifier on divise 150 et 126 par 6 car PGCD(150;126) = 6. On obtient donc :

$\frac{150}{126}=\frac{150\div 6}{126\div 6}=\frac{25}{21}$ et $\frac{25}{21}$ est une fraction irréductible.

4.3.2 Mettre des fractions au même dénominateur (PPCM)

Pour additionner ou soustraire des fractions il faut les mettre au même dénominateur et le mieux est d'en trouver un le plus petit possible. Il suffit de choisir comme dénominateur commun le PPCM des deux dénominateurs du départ.

Exemple :

Pour effectuer $\frac{1}{150}+\frac{1}{126}$ on va calculer le PPCM(150;126)

On sait que PGCD(150;126)=6 donc PPCM = (150 × 126) ÷ 6 = **3 150**

3 150 est le plus petit dénominateur commun que l'on peut choisir.

Donc $\frac{1}{150}+\frac{1}{126}=\frac{21}{3\ 150}+\frac{25}{3\ 150}=\frac{46}{3\ 150}=\frac{23}{1\ 575}$

4.3.3 Résoudre des problèmes

Deux nombres sont premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1.
Leur seul diviseur commun est 1.

4.3.4 Résoudre des problèmes

Exemple :

Une pièce rectangulaire mesure 4,2 m sur 8,7 m.Son sol est couvert de dalles entières et carrées.

1. Quelle est la plus grande dimension possible pour chacune de ces dalles ?
2. Combien faut-il alors de ces dalles pour couvrir le sol de la pièce ?

Fiche d'exercices 3

4.4 Utilisation d'un tableur ou d'une calculatrice programmable.

Voir séance d'informatique et séance de programmation de la Ti82.

5.Les nombres premiers

5.1 Définition et exemples

Définition :

Un nombre entier différent de 1 est un nombre premier s'il possède exactement 2 diviseurs, 1 et lui même.

Exemples :
2 est un nombre premier.
13 est un nombre premier.
6 n'est pas un nombre premier car ses diviseurs sont 1 ; 2 ; 3 et 6

Rq 1:
Tous les nombres pairs différents de 2 ne sont pas des nombres premiers.
Rq 2 :
Il existe une infinité de nombres premiers.

Exercices (Abscisse 2nde, Magnard, éd 2004)

En classe :	38, 39 page 233
	60 Page 236
A la maison :	63 page 237

5.2 Décomposition des nombres entiers

Théorème (Décomposition en produit de nombres premiers)
Tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 s'écrit de manière unique sous la forme d'un produit de puissance de nombres premiers.

Exemples :

$105 = 3 \times 5 \times 7$

$83160 = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11$

Méthode de décomposition :
A l'aide des critères de divisibilité on cherche les diviseurs du nombre et on effectue des divisions successives.

$$\begin{array}{r|l} 83160 & 2 \\ 41580 & 2 \\ 20790 & 2 \\ 10395 & 5 \\ 2079 & 3 \\ 693 & 3 \\ 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

5.3 Utilisation de la décomposition

5.3.1 Simplification des fractions et des racines carrées.

Exemples :

$$\frac{105}{83\,160}=\frac{3\times5\times7}{2^3\times3^3\times5\times7\times11}=\frac{1}{2^3\times3^2\times11}=\frac{1}{792}$$

$$\sqrt{31\,500}=\sqrt{2^2\times3^2\times5^3\times7}=2\times3\times5\times\sqrt{5\times7}=30\sqrt{35}$$

5.3.2 Calcul du nombre de diviseurs

Combien le nombre 2 100 875 a t-il de diviseurs ?

La décomposition donne $2\,100\,875=7^5\times5^3$

Tous les diviseurs de 2 100 875 sont donc de la forme $7^a\times5^b$ en sachant qu'on a les conditions suivantes sur a et b :

$$\begin{cases} 0\leqslant a\leqslant 5 \\ 0\leqslant b\leqslant 3 \\ a\in\mathbb{N}\, b\in\mathbb{N} \end{cases}$$

Il y a 6 choix pour a et 4 choix pour b.

Il y a donc en tout 6×4 = 24 diviseurs possibles.

5.3.3 Calcul du PGCD

La décomposition en produits de nombres premiers nous permet d'avoir une nouvelle méthode pour calculer le PGCD.

Calculons le PGCD(70;294)

70	2	294	2
35	5	147	7
7	7	21	7
1		3	3
		1	

Donc $70 = 2 \times 5 \times 7$ et $294 = 2 \times 7^2 \times 3$

on a donc $PGCD(70; 294) = 2 \times 7$

5.3.4 Calcul du PPCM

Calculons le PPCM(70;294)

On pourrait diviser 70×294 par le PGCD(70;294) mais on va imaginer que l'on ne connaît pas le PGCD(70;294).

$70 = 2 \times 5 \times 7$ et $294 = 2 \times 7^2 \times 3$

donc $PPCM(70; 294) = 2 \times 5 \times 7^2 \times 3 = 1470$

Exercices (Abscisse 2nde, Magnard, éd 2004)

En classe : 40, 41 Page 233

43, 44, 45, 50 Page 234

A la maison : 42 page 233

51 Page 234

A la maison : 94 page 28

6. Curiosités

6.1 Irrationnalité de $\sqrt{2}$

Raisonnons par l'absurde ...

Première étape :

Supposons que $\sqrt{2}$ soit un rationnel. Alors il existe deux entiers p et q, premiers entre eux tel que :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

$\Rightarrow \sqrt{2}^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ est un nombre pair $\Rightarrow$ p est un nombre pair.

Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que **p = 2k**

Deuxième étape :

$p^2 = 2q^2 \Rightarrow (2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2 \Rightarrow q^2$ est pair $\Rightarrow$ q pair

donc il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que **q = 2n**

Conclusion :
p et q sont premiers entre eux et n'ont donc pas de diviseur commun. Il est donc impossible que p et q soient pairs, donc $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.

6.2 Montrons que 0,99999999... = 1

Posons x = 0,99999999 ...
$\Leftrightarrow$ 10x = 9,9999999 ...
$\Rightarrow$ 10x – x = 9,999999999 ... - 0,9999999999 ... = 9
$\Rightarrow$ 9x = 9
$\Leftrightarrow$ x = 1

Annexe 1 (Chapitre 1)
Classification des nombres

Act1 :

1. Supposons que seuls les nombres entiers naturels ($\mathbb{N}$) existent, quelles sont les équations ci-dessous qui ont des solutions : (Barrer les équations que l'on ne peut pas résoudre)

$3 - x = 7$	$2x + 3 = 5$	$4x = 5$	$3x = -1$
$9x - 5 = 13$	$3x^2 = 9$	$2x^2 = 8$	$x \div 4 = 5$
$x^2 = -1$	$6x + 7 = 6x + 5$	$-4x+7=\sqrt{2}$	$3x = 0$

2. Entourer la bonne réponse :

L'ensemble $\mathbb{N}$ permet-il de résoudre toutes les équations ? Oui Non

Si on additionne deux entiers naturels, obtient-on un entier naturel ? Oui Non

Si on soustrait deux entiers naturels, obtient-on un entier naturel ? Oui Non

Si on multiplie deux entiers naturels, obtient-on un entier naturel ? Oui Non

Si on divise deux entiers naturels, obtient-on un entier naturel ? Oui Non

Act2 :

1. Supposons que seuls les nombres entiers relatifs ($\mathbb{Z}$) existent, quelles sont les équations ci-dessous qui ont des solutions : (Barrer les équations que l'on ne peut pas résoudre)

$3 - x = 7$	$2x + 3 = 5$	$4x = 5$	$3x = -1$
$9x - 5 = 13$	$3x^2 = 9$	$2x^2 = 8$	$x \div 4 = 5$
$x^2 = -1$	$6x + 7 = 6x + 5$	$-4x+7=\sqrt{2}$	$3x = 0$

2. Entourer la bonne réponse :

L'ensemble $\mathbb{Z}$ permet-il de résoudre toutes les équations ? Oui Non

Si on additionne deux entiers relatifs, obtient-on un entier naturel ? Oui Non

Si on soustrait deux entiers relatifs, obtient-on un entier naturel ? Oui Non

Si on multiplie deux entiers relatifs, obtient-on un entier naturel ? Oui Non

Si on divise deux entiers relatifs, obtient-on un entier naturel ? Oui Non

Act3 :

1. Supposons que seuls les nombres décimaux ($\mathbb{D}$) existent, quelles sont les équations ci-dessous qui ont des solutions : (Barrer les équations que l'on ne peut pas résoudre)

$3 - x = 7$	$2x + 3 = 5$	$4x = 5$	$3x = -1$
$9x - 5 = 13$	$3x^2 = 9$	$2x^2 = 8$	$x \div 4 = 5$
$x^2 = -1$	$6x + 7 = 6x + 5$	$-4x+7=\sqrt{2}$	$3x = 0$

2. Entourer la bonne réponse :

L'ensemble $\mathbb{D}$ permet-il de résoudre toutes les équations ? Oui Non

Si on additionne deux décimaux, obtient-on un entier naturel ? Oui Non

Si on soustrait deux décimaux, obtient-on un entier naturel ? Oui Non

Si on multiplie deux décimaux, obtient-on un entier naturel ? Oui Non

Si on divise deux décimaux, obtient-on un entier naturel ? Oui Non

Act4 :

1. Supposons que seuls les nombres décimaux (ℚ) existent, quelles sont les équations ci-dessous qui ont des solutions : (Barrer les équations que l'on ne peut pas résoudre)

$3 - x = 7$	$2x + 3 = 5$	$4x = 5$	$3x = -1$
$9x - 5 = 13$	$3x^2 = 9$	$2x^2 = 8$	$x \div 4 = 5$
$x^2 = -1$	$6x + 7 = 6x + 5$	$-4x+7=\sqrt{2}$	$3x = 0$

2. Entourer la bonne réponse :

L'ensemble ℚ permet-il de résoudre toutes les équations ? Oui Non

Si on additionne deux rationnels, obtient-on un entier naturel ? Oui Non

Si on soustrait deux rationnels, obtient-on un entier naturel ? Oui Non

Si on multiplie deux rationnels, obtient-on un entier naturel ? Oui Non

Si on divise deux rationnels, obtient-on un entier naturel ? Oui Non

Act5 :

1. Supposons que seuls les nombres décimaux (ℝ) existent, quelles sont les équations ci-dessous qui ont des solutions : (Barrer les équations que l'on ne peut pas résoudre)

$3 - x = 7$	$2x + 3 = 5$	$4x = 5$	$3x = -1$
$9x - 5 = 13$	$3x^2 = 9$	$2x^2 = 8$	$x \div 4 = 5$
$x^2 = -1$	$6x + 7 = 6x + 5$	$-4x+7=\sqrt{2}$	$3x = 0$

2. Entourer la bonne réponse :

L'ensemble ℝ permet-il de résoudre toutes les équations ? Oui Non

Si on additionne deux réels, obtient-on un entier naturel ? Oui Non

Si on soustrait deux réels, obtient-on un entier naturel ? Oui Non

Si on multiplie deux réels, obtient-on un entier naturel ? Oui Non

Si on divise deux réels, obtient-on un entier naturel ? Oui Non

Annexe 2 (Chapitre 1)
Différentes approximations

Activités
A l'aide de votre calculatrice, remplir le tableau ci-dessous

	Valeur approchée par excès à 10^{-3} près	**Valeur approchée par défault à 10^{-3} près**	**Toncature à la précision 10^{-2}**	**Arrondi à la précision 10^{-4}**	**L'ordre de grandeur**
465,76543					
- 78,98554					
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$					
$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$					
$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$					
$\frac{4\times10^{3}\times10^{-4}}{\sqrt{3}\times10^{6}}$					
$\frac{\sqrt{12}\times\sqrt{105}}{2\sqrt{7}}$					
$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{5}{7}\right)^{3}$					
$\frac{(3\sqrt{7}+2\sqrt{5})}{(5\sqrt{2}-8\sqrt{6})}$					

Annexe 3 (Chapitre 1)
Décomposition en produits de nombres premiers

Partie I :

Soit le nombre 40 500.
Complète les divisions Euclidiennes suivantes :

40500	***2***
....	2
....	3
....	3
....	3
....	3
....	5
....	5
....	5

Complète alors les égalités suivantes :

40 500 = 2 × .... = 2×2× .... = 2×2×3×........... = 2×2×3×3× ....
= 2×2×3×3×3×......... = 2×2×3×3×3×3×..........
= 2×2×3×3×3×3×5×......... = 2×2×3×3×3×3×5×5× ....

Donc $$40\,500 = 2^{\cdots} \times 3^{\cdots} \times 5^{\cdots}$$

Partie II :

Faire la même chose avec 1 260
et complète $$1\,260 = 2^{\cdots} \times 3^{\cdots} \times 5^{\cdots} \times 7^{\cdots}$$

Partie III :

a. Simplifie rapidement $\dfrac{40500}{1260}$

b. Simplifie rapidement $\sqrt{40500}$ et $\sqrt{1260}$

c. Trouve rapidement le PGCD(40 500 ; 1 260)

d. Trouve rapidement le PPCM(40 500 ; 1 260)

Annexe 4 (Chapitre 1)

Fiche d'exercices 3

Les critères de divisibilté

- **Un nombre est divisible par 2** s'il se termine par un chiffre pair.
- **Un nombre est divisible par 3** si la somme de ses chiffres est divisible par 3
- **Un nombre est divisible par 4** si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.
- **Un nombre est divisible par 5** s'il se termine par 0 ou 5.
- **Un nombre est divisible par 6** s'il est divisible à la fois par 2 et par 3.
- **Un nombre est divisible par 7** si et seulement si
  le nombre de dizaines - le double du chiffre des unités est divisible par 7.
- **Un nombre est divisible par 8** si le nombre formé par ses trois derniers chiffres
  est divisible par 8.
- **Un nombre est divisible par 9** si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- **Un nombre est divisible par 10** si le chiffre des unités est 0.
- **Pour déterminer si un nombre N est divisible par 11** :
  on calcule la somme A des chiffres en position impaire ;
  on calcule la somme B des chiffres en position paire ;
  N est divisible par 11 si et seulement si la différence A – B (ou B – A) est
  divisible par 11.
  Ou
  Si un nombre de trois chiffres a son chiffre du milieu égal à la somme des deux
  chiffres extrêmes alors il est divisible par 11.
- **Un nombre est divisible par 12** s'il est divisible par 3 et par 4.

Compléte le tableau ci-dessous par oui ou par non :

Divisible par	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**9**	**11**	**12**
420									
630									
583									
1386000									
19800									
47628									
15552									
4790016									
161051									

Annexe 5 (Chapitre 1)

Devoir à la maison numéro 1

Exercice 1 :

1. Développer, réduire et simplifier : $A = (2n + 1)^2 - (2n - 1)^2$
2. En déduire une méthode simple pour calculer :
   2.1 $B = 15^2 - 13^2$
   2.2 $C = 221^2 - 219^2$

Exercice 2 :

Simplifier les calculs suivants et dire à quel ensemble appartient le résultat obtenu..

$$A=\frac{(\frac{2}{3}+4)[\frac{3}{10}-(\frac{1}{2}-1)]}{\frac{7}{5}-3} \qquad B=\frac{(2^3)^{-2}\times(2^2)^5\times3^2}{(2\times3)^{-2}}$$

$$C=\frac{\sqrt{27}+\sqrt{12}-\sqrt{75}}{2\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{50}} \qquad D=\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

Exercice 3 :

Trouver tous les nombres entiers naturels vérifiant $a^2 - b^2 = 25$

Exercice 4 :

Un fil électrique de section S comporte n électrons par unité de volume se déplaçant à la vitesse v.
L'intensité I du courant électrique circulant dans ce fil est donnée par : $I = nSqv$ où q désigne une charge électrique.
Calculer I en Ampères et en écriture scientifique sachant que :

$$n=6{,}1\times10^{26}\,m^{-3} \qquad q=1{,}6\times10^{-19}\,C$$

$$v=2\times10^{-3}\,m.s^{-1} \qquad S=1{,}2\times10^{-6}\,m^2$$

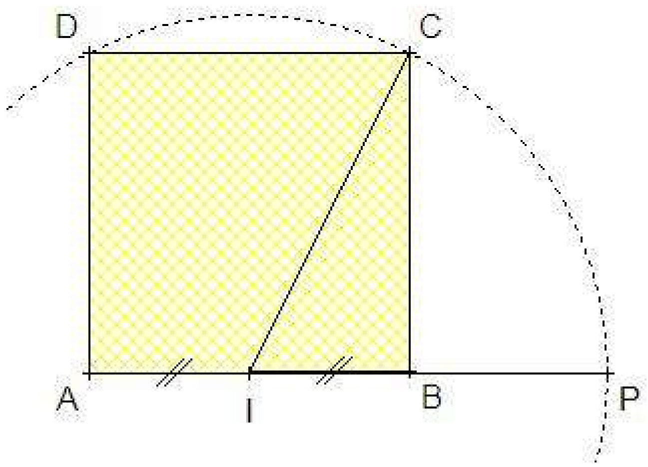
Annexe 6 (Chapitre 1)

Devoir à la maison numéro 2

PARTIE 1 :

On considère un carré ABCD de côté 1.

Le point I est le milieu de [AB]. Le cercle de centre I et de rayon IC coupe la demi-droite [IB) en P.



1. Calculer les distances IB, IC puis AP.
2. On note $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (ϕ se lit « phi » et s'appelle le nombre d'or)

   Démontrer que $\frac{AP}{AB}=\frac{AB}{BP}=\phi$

   Donner une valeur approchée de ϕ à 10^{-3} près.
3. Calculer ϕ^2 et vérifier que $\phi^2 = \phi + 1$

PARTIE II :

Supposons que ϕ s'écrive sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers.

1. p et q peuvent-ils être tous les deux pairs ?

2.
   a. A l'aide de l'égalité démontrée à la question 3, prouver que $p^2 = q^2 + pq$.
   b. En déduire que $p^2 - q^2 = pq$.
3.
   a. Si p et q sont tous les deux impairs, de quelle parité sont : pq, p^2, q^2, $p^2 - q^2$?
      L'égalité $p^2 - q^2 = pq$ est-elle possible ?
   b. Etudier de même le cas où p est pair et q impair, puis le cas ou p est impair et q pair.

4. Que peut-on en déduire sur la nature du nombre ϕ ?