Chapitre 1. les nombres

I ensembles de nombres

1. les nombres entiers

définition
0 ;1 ;2 ;3 ;… sont les nombres entiers naturels.
l'ensemble de ces nombres est noté IN (comme naturel) (ici on se déplace de 1 en 1)
ex 7 ? IN mais –7 ? IN et 3,8 ? IN.

définition
… ;-3 ;-2 ;-1 ;0 ;1 ;2 ;3 ;… sont les nombres entiers relatifs. (ils sont négatifs, positifs ou nuls)
l'ensemble de ces nombres est noté Z (comme zahl qui signifie nombre en allemand)
(ici on se déplace de –1 en –1 et de 1 en 1)

ex : 7 ? IN mais –7 ? IN et 3,8 ? IN

remarque : IN ? Z « IN est inclus dans Z » c'est à dire que tout entier naturel est un entier relatif.

2. les nombres rationnels

définition
les nombres rationnels sont les quotient $\frac{a}{b}$ où a est un entier relatif et b un entier relatif non nul.

l'écriture $\frac{a}{b}$ est appelée écriture fractionnaire.

l'ensemble de ces nombres est noté Q (comme quotient)

remarque Z ? Q

en effet, soit a ? Z. on sait que a = $\frac{a}{1}$

comme 1 ? Z et 1 ? 0 alors $\frac{a}{1}$? Q

donc a ? Q
d'où si a ? Z alors a ? Q i.e Z ? Q

ex : 7 ? Q ; $\frac{5}{2}$? Q ; $\frac{1}{3}$? Q ; 3,8 ? Q car 3,8 = $\frac{38}{10}$

remarque
un même nombre rationnel peut s'écrire sous forme fractionnaire d'une infinité de façons.
par exemple, $\frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \frac{20}{15} = \frac{24}{18} = \ldots\ldots$

(car $\frac{a}{b} = \frac{ka}{ka}$ où a, b, k sont des entiers relatifs, b et k non nuls)

3. cas particuliers :les nombres décimaux

définition
les nombres qui sont le quotient d'un entier relatif par une puissance de dix sont appelés nombres décimaux (décimal $\longleftrightarrow$ dix)
l'ensemble de ces nombres est noté ID (comme décimal)

remarques

$\longrightarrow$ ID ? Q
les décimaux sont des rationnels particuliers (10^p ? 0 et 10^p ? Z, p ? IN)

$\longrightarrow$ comme on divise un entier par une puissance de dix cela signifie que les décimaux sont des nombres à virgules ayant un nombre fini de chiffres après la virgule ex : $\frac{1385}{100}$ = 13,85 ? ID — 13 est la partie entière de 13,85

0,85 est la partie décimale de 13,85

notation fractionnaire — notation décimale

$-\frac{4}{1000}$ = -0,004 ? ID — 0 est la partie entière de –0,004

-0,004 est la partie décimale de 0,004

$\frac{3}{4} = \frac{75}{100}$? ID

mais $\frac{1}{3}$? ID car on ne peut pas se ramener à une puissance de dix au dénominateur. de plus $\frac{1}{3}$ = 0,33333333….. l'écriture décimale ne s'arrête pas.

<u>critère pour reconnaître un nombre décimal sous forme fractionnaire.</u>
sous forme irréductible, le dénominateur n'est qu'un produit de 2 et/ou de 5.

<u>propriété et définition</u>
tout nombre décimal peut s'écrire $a?10^p$ ou $-a?10^p$ où a est un décimal tel que <u>1 ? a < 10</u> (i.e ayant un seul chiffre avant la virgule autre que 0) et p un entier relatif.

cette écriture est appelée notation scientifique du nombre.
10^p est appelé l'ordre de grandeur du nombre.

<u>remarque</u>
cette écriture est souvent plus commode notamment pour comparer des nombres (il faut juste comparer les « a ») ; changer d'unité ;donner l'ordre de grandeur du résultat d'une opération.
elle est très utile en physique-chimie.

<u>ex</u> : 2328423 = $2,328423?10^6$
sur la calculatrice 2.328423 E6
E pour exposant E6 signifie 10^6

10^6 est l'ordre de grandeur de 2328423

-0,00032 = $-3,2?10^{-4}$
sur la calculatrice -3.2 E-4

10^{-4} est l'ordre de grandeur de –0,00032

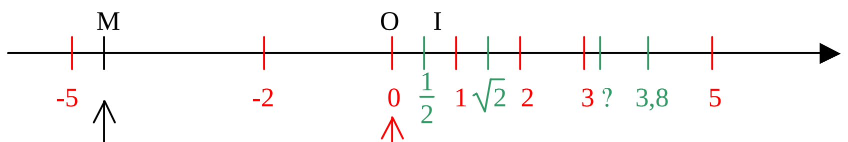
4. les autres nombres

ils existent des nombres qui n'appartiennent à aucun des ensembles que nous venons de voir.

on démontre par exemple que $\sqrt{2}$? Q ; $\frac{-\sqrt{3}}{2}$? Q ; ? ? Q

ces nombres sont appelés nombres irrationnels (i.e « qui ne sont pas rationnels »)
ils appartiennent avec tous les nombres précédents à l 'ensemble des nombres réels qui est noté IR (comme réel)

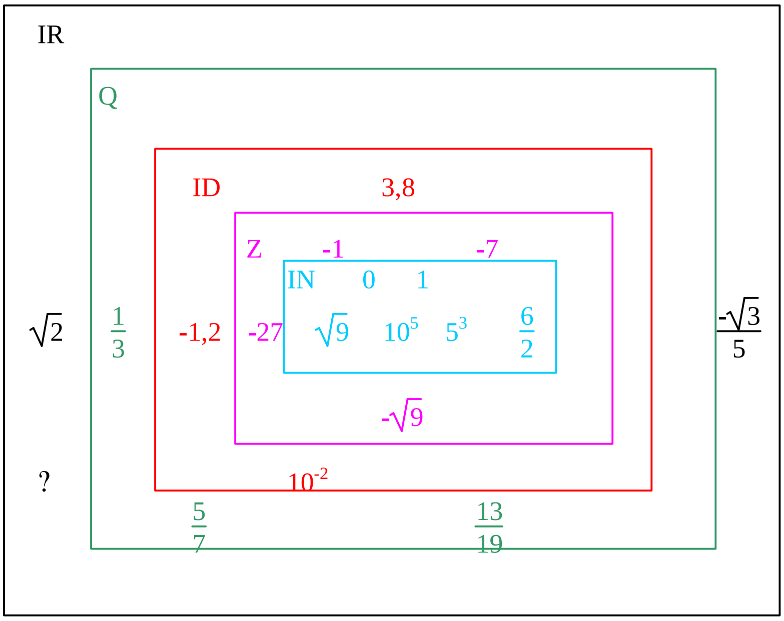
l'ensembles des nombres réels est aussi l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée. (c'est à dire munie d'un repère (O ;I)). cette droite, qui représente alors IR est appelée droite des réels ou droite numérique.



abscisse du point M
dans le repère (O ;I)

zéro est le seul nombre à la
fois positif et négatif

récapitulatif
les différents ensembles de nombres sont emboîtés
on a donc IN ? Z ? ID ? Q ? IR



remarques :

dans les exercices « soit x un nombre quelconque » sera désormais remplacé par : « soit x ? IR » ou « soit x un nombre réel »

le signe * placé en haut à droite de la lettre désignant un ensemble de nombres, prive celui-ci de zéro.
ainsi IR* désigne les réels non nuls.

le signe + – placé en haut à droite de la lettre désignant un ensemble de nombre, prive celui-ci des nombres négatifs positifs
ainsi IR^+ désigne l'ensemble des réels positifs (avec zéro)
IR^- désigne l 'ensemble des réels négatifs (avec zéro)

5. valeur approchée

définition
on appelle valeur approchée d'un nombre x à la précision e ou à e près tout nombre a tel que

a – e ? x ? a + e

ex: 1,4 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 0,01 près (10^{-1} près)
car 1,4 – 0,1 ? $\sqrt{2}$? 1,4 + 0,1
1,4 = a 0,1 = e $\sqrt{2}$ = x

II nombres premiers

1. diviseur d'un nombre entier naturel

définition
soit a ? IN, b ? IN*
on dit que b est un diviseur de a s'il existe un entier naturel k tel que a = k?b

ex : 12 = 4 ? 3 = 1 ? 12 = 6 ? 2
4, 3, 1, 12, 6 et 2 sont des diviseurs de 12
par contre 5 n'est pas un diviseur de 12 car 12 ? 5 ? IN

2. nombres premiers

définition
un nombre entier naturel est premier s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même

ex : 12 n'est pas premier
5 est premier

les premiers nombres premiers :
2 ;3 ;5 ;7 ;11 ;13 ;17 ;19 ;…….
(voir crible d'Eratosthène cahier d'exercices)

remarques
1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur : 1
2 est le seul nombre premier pair
il y a un infinité de nombre premier

3. décomposition en produit de facteurs premiers

théorème
tout entier naturel non premier se décompose en produit de facteurs premiers

ex : $28 = 2 ? 14 = 2 ? 2 ? 7 = 2^2 ? 7$

$$\begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$60 = 2 ? 30 = 2 ? 2 ? 15 = 2 ? 2 ? 3 ? 5 = 2^2 ? 3 ? 5$

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 29 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

4. critère de divisibilité

par 2 : le nombre se termine par un chiffre pair : 0, 2, 4, 6, 8
par 3 : la somme des chiffres du nombres est divisible par 3
par 5 : le nombre se termine par 0 ou 5
par 9 : la somme des chiffres du nombre est divisible par 9
par 10 : le nombre est divisible par 2 et 5 c'est à dire il se termine par 0

5. application

a) simplifier les fractions

$$\frac{84}{60} = \frac{2 ? 2 ? 3 ? 7}{2 ? 2 ? 3 ? 5} = \frac{7}{5} \quad \longleftarrow \quad \text{fraction irréductible}$$

b) simplifier les racines carrées

$$\begin{aligned} \sqrt{2100} &= \sqrt{2 ? 2 ? 3 ? 5 ? 5 ? 7} \\ &= \sqrt{2^2 ? 5^2 ? 3 ? 7} \\ &= \sqrt{(2 ? 5)^2 ? 3 ? 7} \\ &= \sqrt{(2 ? 5)^2} ? \sqrt{3 ? 7} \\ &= 2 ? 5 ? \sqrt{3 ? 7} \\ &= 10\sqrt{21} \end{aligned}$$

c) <u>calculer le PGCD de deux nombres entiers naturels</u>

pgcd(36 ; 120) = ?

36	$\boxed{2}$	120	$\boxed{2}$
18	$\boxed{2}$	60	$\boxed{2}$
9	$\boxed{3}$	30	2
3	3	15	3
1		5	5
			1

pgcd (36 ; 120) = 2 ? 2 ? 3 = 12