المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي

Leçons N°1 الدرس رقم

Notions de logique *** مبادئ في المنطق

إعتبارات تربوية:

عن التوجيهات التربوية العامة لتدريس مادة الرياضيات :

- **تزويد التلاميذ بمفاهيم ومبادئ أولية لتنظيم أفكارهم.**
- **مدهم بتقنيات ونماذج تساعدهم على بناء وصياغة البراهين الرياضية على أسس واضحة و سليمة.**

ملاحظة: بلوغ هذه الأهداف لايتحقق مع إنتهاء هذا الفصل، لذا يجب إستعمال نتائجه كلما سنحت الفرصة لذلك في مختلف فصول البرنامج اللاحقة.

البرامج والقدرات المنتظرة والتوجيهات التربوية

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
1) تعاريف ومصطلحات: النص الرياضي- العبارة – الدالة العبارية. المكممات و العبارات المكممة. العمليات المنطقية. النفي- العطف- الفصل- الإستلزام- التكافؤ **2) القوانين المنطقية و الإستدلالات الرياضية:** جرد لقوانين منطقية أساسية. الإستدلال الإستنتاجي. الإستدلال بالتكافؤات المتتالية الإستدلال بالإستلزام المضاد للعكس الإستدلال بالخلف. الإستدلال بفصل الحالات. الإستدلال بالترجع.	• تحويل نص رياضي إلى كتابة ترميزية بإستعمال الروابط و المكممات وعكس ذلك. • إستعمال إستدلال مناسب حسب الوضعية المدروسة. • التمكن من صياغة براهين و إستدلالات رياضية واضحة و سليمة منطقيا.	• ينبغي تقريب العبارات و القوانين المنطقية وطرائق الإستدلال إنطلاقامن أنشطة متنوعة مستقاة من الرصيد المعرفي للتلميذ ومن وضعيات رياضية سبق التعامل معها. • تجنب البناء النظري و الإفراط في إستعمال جداول الحقيقة. • يعتبر هذا الفصل فرصة لحل معادلات و متراجحات لا جذرية و بعض المتفاوتات. • إن درس المنطق لا ينتهي بإنتهاء هذا الفصل بل ينبغي إستثمارنتائجه كلما سمحت الفرصة لذلك بمختلف فصول المقرر اللاحقة.

السنة الأولى من سلك الباكالوريا علوم رياضية
Première année du bac Sciences maths
Le nouveau programme : 2006 – 2007

Notions de logique *** مبادئ في المنطق

1) النص الرياضي - العبارة - الدالة العبارية:

تعريف 1 :

نسمي نصا رياضيا، كل تجميع لكلمات و حروف ممزوجة برموز رياضية، و تشكل هذه النصوص لغة الرياضيات.

أمثلة:

($\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$) ، (2 عدد فردي) ، ($\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$) ، ($\sqrt{3}>\sqrt{2}$).....الخ.. تمثل نصوصا رياضية.

تعريف 2 :

نسمي عبارة، كل نص رياضي له معنى ويكون إما صحيحا وإما خاطئا

أمثلة:

" مجموع عددين صحيحين متتاليين هو عدد فردي " هي عبارة صحيحة.

"$\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ " هي عبارة خاطئة.

ملاحظات:

بتعبير آخر وبكيفية مبسطة، العبارة هي حشد من الكلمات والرموز، يكون جملة خبرية، تحمل معنى قد يكون خاطئا أو صحيحا ,ولا يمكن أن يكون صحيحا وخاطئا في آن واحد.

و نرمز لقيمة صحيحة ب:(V أو 1) ونرمز لقيمة خاطئة ب:(F أو 0) ، و نمثل ذلك بأحد الجدولين: **جدول الحقيقة**

P
V
F

أو

P
1
0

تطبيقات: 1) أعط مثالا لعبارة صحيحة.

2) أعط مثالا لعبارة خاطئة

تعريف3:

نسمي دالة عبارية (أو خاصية لمتغير) كل نص رياضي له معنى ويحتوي على متغير (أو عدة متغيرات) ينتمي إلى مجموعة معلومة E بحيث تصبح عبارة كلما عوضنا المتغير (أو المتغيرات) بقيمة معينة .

أمثلة:

$Q(x):"x\in\mathbb{Z}\quad x+3>0"$ دالة عبارية ولدينا Q (0) صحيحة وQ(-7) خاطئة.

$P(a,b):"a^2+b^2=4"$ حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ دالة عبارية و لدينا $P(0,1)$ خاطئة و $P(0,2)$ صحيحة.

تطبيقات:

(1 حدد قيم المتغير (x,y) التي تكون من أجلها الخاصية $P(x)\ :2x-3y=7$ صحيحة حيث $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

(2 حدد قيم المتغير x التي تكون من أجلها الخاصية خاطئة حيث $x\in\mathbb{R}$.

2) المكممات – العبارات المكممة:

تعريف:

لتكن $P(x)$ دالة عبارية لمتغير x من مجموعة غير فارغة E. انطلاقا من الدالة العبارية $\boxed{(x\in E):P(x)}$

نعرف العبارات التالية:

* $\boxed{(\forall x\in E):P(x)}$ وهي عبارة تكون صحيحة إذا كان كل عنصر x من E يحقق الخاصية P(x).

- الرمز $\forall$ يسمى المكمم الكوني ويقرأ " مهما يكن " أو " لكل "

* $\boxed{(\exists x\in E):P(x)}$ وهي عبارة تكون صحيحة إذا وجد على الأقل عنصرا x من E يحقق الخاصية P(x).

- الرمز $\exists$ يسمى المكمم الوجودي ويقرأ " يوجد على الأقل "

* $\boxed{(\exists! x\in E):P(x)}$ وهي عبارة تكون صحيحة إذا وجد عنصر وحيد x من E يحقق الخاصية P(x).

- الرمز $\exists!$ يسمى مكمم الوجودية و الوحدانية ويقرأ " يوجد عنصر وحيد "

أمثلة:

نعتبر العبارات التالية:

- $\left[(\forall x \in \mathbb{R}) : 2x + 1 = 0 \right] * (P_1)$

P_1 عبارة خاطئة (باعتبار $x = 0$)

- $\left[(\exists x \in \mathbb{R}) : 2x + 1 = 0 \right] * (P_2)$

P_2 عبارة صحيحة (لأن العدد الحقيقي $x = -1/2$ يحقق $2x + 1 = 0$

- $\left[(\exists x \in \mathbb{Z}) : 2x + 1 = 0 \right] * (P_3)$

P_3عبارة خاطئة (إذا افترضنا وجود عدد نسبي x_0 يحقق $2x_0 + 1 = 0$ فإن $2x_0 + 1 = 0$ زوجي وهذا غير ممكن)

- $\left[(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) : x + y = 1 \right] * (P_4)$

P_4 عبارة خاطئة (باعتبار $x = 1$ و $y = 2$

لدينا $1 = 1 + 2$ خاطئة)

- $\left[(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) : x + y = 1 \right] * (P_5)$

P_5: عبارة صحيحة ليكن $x \in \mathbb{R}$ وباعتبار $y = 1 - x$ فإن $x + (1 - x) = 1$ صحيحة.

- $\left[\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1 \right] * (P_6)$

P_6 عبارة صحيحة وذلك بأخذ $x = 0$ و $y = 1$

- $\left[(\forall a \in \mathbb{R}_+^*) \, a + (1/a) \geq 2 \right] * (P_7)$

$P(7)$: عبارة صحيحة

ليكن $a \in \mathbb{R}_+^*$. بما أن $\left(\sqrt{a} + \dfrac{1}{\sqrt{a}} \right)^2 \geq 0$ فإن $a - 2 + \dfrac{1}{a} \geq 0$ أي: $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$

تطبيقات:

حدد حقيقة كل من العبارات التالية:

$(\exists x \in \mathbb{R}) : \left[x^2 + x + 1 = 0 \right] * (Q_1)$

$(\exists x \in \mathbb{R}) : \left[x^2 + x + 1 > 0 \right] * (Q_2)$

$(\exists x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) : \left[x \leq y \right] * (Q_3)$

$(\forall y \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) : \left[x \leq y \right] * (Q_4)$

$(\exists x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) : \left[x \leq y \right] * (Q_5)$

$(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) : \left[x^2 y^2 > xy \right] * (Q_6)$

ملاحظة:

a. إذا كانت عبارة مكممة تحمل عدة مكممات من نفس الطبيعة فإن ترتيب هذه الأخيرة ليس له أهمية في تحديد معنى العبارة.

b. إذا كانت عبارة تحمل عدة مكممات من طبيعة مختلفة فإن ترتيب هذه الأخيرة له أهمية في تحديد معنى العبارة.

3) العمليات على العبارات:

3 - 1 – نفي عبارة:

نفي العبارة P هي عبارة نرمز لها بأحد الرمزين: $\rceil P$ أو $\overline{P}$ و تكون صحيحة إذا كانت P خاطئة وتكون خاطئة إذا كانت P صحيحة. نعبر عن قيمة حقيقية العبارة $\overline{P}$ بدلالة قيمة حقيقة العبارة P في الجدول التالي:

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

a-نفي عبارة مكممة:

*نفي العبارة "$(\forall x \in E) \, P(x)$" هي العبارة "$(\exists x \in E) \, \overline{P}(x)$".

*نفي العبارة "$(\exists x \in E) \, P(x)$" هي العبارة "$(\forall x \in E) \, \overline{P}(x)$"

*نفي العبارة: "$(\forall x \in E) \, (\exists y \in F) P(x, y)$" هي العبارة "$(\exists x \in E) \, (\forall y \in F) \overline{P}(x, y)$"

b-الاستدلال بالمثال المضاد

للبرهان على خطأ العبارة $"(\forall x\in E)\,P(x)"$ نبين صحة نفيها $"(\exists x\in E)\,\overline{P(x)}"$

مثال:

لنبين خطأ العبارة: (Q) *" $\forall (m,n)\in \mathbb{N}^{*2}\quad \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+.........+\frac{1}{n+m}\in \mathbb{N}$ "

نفي (Q) هي العبارة: $(\overline{Q})$ *" $\exists (m,n)\in \mathbb{N}^{*2}\quad \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+.........+\frac{1}{n+m}\notin \mathbb{N}$ "

يأخذ $n = 1$ و $m = 2$ نحصل على $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+2}=\frac{11}{6}$ إذن: $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+2}=\frac{11}{6}\notin\mathbb{N}$

ومنه العبارة $\overline{Q}$ صحيحة. إذن العبارة Q خاطئة.

تطبيقات:

باستعمال الاستدلال بالمثال المضاد بين أن العبارات التالية خاطئة:

1) $(\forall x\in\mathbb{R})\ (\forall y\in\mathbb{R})\ : 2x-4y\neq 5$

2) $(\forall x\in\mathbb{R}^*):\ x+(1/x)\geq 2$

3) $(\forall x\in]0,1[)\quad \frac{2x}{x^2(1-x^2)}<1$

4) $(\forall a\in]0,1[)\,(\forall b\in]0,1[):\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}<1-ab$

2-3-فصل عبارتين:

تعريف:

فصل عبارتين P و Q هي عبارة نرمز لها ب(P أو Q) والتي تكون خاطئة فقط في حالة P و Q وخاطئتين معا.

جدول حقيقة العبارة(Q أو P):

P	Q	P أو Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

أمثلة:

* $\left(\sqrt{3}=\sqrt{\sqrt{9}}\right)$ أو $\left(\sqrt{3}\in\mathbb{Q}\right)$ عبارة صحيحة
* $(5<6)$ أو $(5=6)$ عبارة صحيحة
* $\left(\sqrt{2+3}=\sqrt{2}+\sqrt{3}\right.$ أو $\left.\left(\sqrt{2}+1\right)^2=3\right)$ عبارة خاطئة.

ملاحظة:

العبارتان: (P أو Q) و (Q أو P) لهما نفس المعنى، " نقول إن عملية الفصل تبادلية ".

العبارتان: Rأو(P أو Q) و (Q أوR) أو P لهما نفس المعنى، " نقول إن عملية الفصل تجميعية ".

تطبيقات:

ليكن a و b من $]4;+\infty[$ ونعتبر المعادلتين: $(E): x^2+ax+b=0$ و $(F): x^2+bx+a=0$

ليكن Δ_1 مميز (E) و Δ_2 مميز (F) ونعتبر العبارتين (P): $"\Delta_1\geq 0"$ و (Q): $"\Delta_2\geq 0"$

بين أن العبارة (P أو Q)صحيحة.

3-3 عطف عبارتين:

تعريف:

عطف عبارتين P و Q هي العبارة التي نرمز لها بالرمز $(P$ و $Q)$ والتي تكون صحيحة فقط في حالة P و Qصحيحتين معا.

<u>جدول حقيقة العبارة</u>(P و Q):

P	Q	P و Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

أمثلة:

* $\left(\sqrt{3} \in \mathbb{Q} \quad و \quad \sqrt{3} = \sqrt{\sqrt{9}}\right)$ عبارة خاطئة

* $\left(\sqrt{3} < 2 \quad و \quad (\sqrt{3})^2 \in \mathbb{N}\right)$ عبارة صحيحة

ملاحظة:

العبارتان $(P$ و $Q)$ و $(Q$ و $P)$ لهما نفس المعنى. " نقول إن عملية العطف تبادلية ".

العبارتان " : $(P$ و$Q)$وR و Pو $(Q$ و$R)$ لهما نفس المعنى. " نقول إن عملية العطف تجمعية "

4-3 استلزم عبارتين:

تعريف:

انطلاقا من عبارتين P و Q نحصل على العبارة " $(\overline{P}$ أو $Q)$ " التي تكون خاطئة فقط إذا كانت P صحيحة وكانت Q خاطئة.

العبارة " $(\overline{P}$ أو $Q)$ " تسمى استلزام العبارتين P و Q وتكتب $P \Rightarrow Q$ وتقرأ " P تستلزم Q "

ملاحضة:

استلزام العبارتين P و Q هي العبارة التي نرمز لها بالرمز $P \Rightarrow Q$ والتي تكون خاطئة فقط إذا كانت P صحيح و Q خاطئة.

<u>جدول حقيقة العبارة</u>($P \Rightarrow Q$):

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

أمثلة:

* $(3 < 2 \Rightarrow 9 > 4)$ عبارة صحيحة

* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} = 1.41$ عبارة خاطئة

* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} > 0$ عبارة صحيحة

* (I منتصف $[AB]$ $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow$ عبارة صحيحة.

تطبيقات:

(1 a و b عددان حقيقيان معلومان. بين أن: $|b| < 1 \Rightarrow |a+b| < |1+ab|$ و $|a| < 1$

(2 ليكن x و y من $\mathbb{R}^*$. ونعتبر العبارتين: $(q): \dfrac{1}{x^2+y^2} \leq 20$ و $(p): 2x+4y=1$. بين أن: $p \Rightarrow q$

ملاحظة:

- الإستلزام $q \Rightarrow p$ بسمى الإستلزام العكسي للإستلزام $p \Rightarrow q$
- العبارتان $(p \Rightarrow q)$ و $(q \Rightarrow p)$ ليس لهما نفس المعنى
- العبارتان $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ و $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ ليس لهما نفس المعنى

5-3-الشرط الكافي- الشرط اللازم

- إذا كان الإستلزام $[p \Rightarrow q]$ صحيحا فإنه يكفي أن تكون العبارة (p) صحيحة.

$\boxed{\text{صحة p شرط كاف لصحة q}}$

- إذا كانت العبارة q صحيحة فإن العبارة p تكون إما صحيحة أو خاطئة ونعبر عن ذلك بقولنا:

$\boxed{\text{صحة q شرط لازم لصحة p}}$

العبارة $(P \Rightarrow Q)$ صحيحة

شرط لازم لصحة (P) — شرط كاف لصحة (Q)

أمثلة:

نعلم أن الإستلزام التالي صحيح:

(ABC مثلث متساوي الساقين) $\Leftarrow$ ABC مثلث متساوي الأضلاع

- الشرط ABC مثلث متساوي الأضلاع كاف ليكون ABC متساوي الساقين.
- الشرط ABC مثلث متساوي الساقين لازم ليكون ABC متساوي الأضلاع.
- ونلاحظ أن هذا الشرط اللازم إذا توفر فإنه يتيح الإمكانية كون ABC متساوي الأضلاع، دون أن يضمن ذلك، غير أن عدم توفره يلغي هذه الإمكانية تماما.

خاصية

العبارتان التاليتان صحيحتان.

$$\boxed{\left[(\forall x \in E): A(x) \Rightarrow B(x)\right] \Rightarrow \left[(\forall x \in E): A(x) \Rightarrow (\forall x \in E): B(x)\right]}$$

$$\boxed{\left[(\exists x \in E)(\forall y \in F): A(x,y)\right] \Rightarrow (\forall x \in F)(\exists x \in E): A(x,y)}$$

ملاحظة:

يمكنك ملاحظة أن الإستلزام العكسي :

$\left[(\forall x \in E): A(x) \Rightarrow (\forall x \in E): B(x)\right] \Rightarrow \left[(\forall x \in E) A(x) \Rightarrow B(x)\right]$ يمكن أن يكون خاطئا.

مثلا : العبارة: " يوجد تلميذ لا يفضل الرياضيات أو جمع التلاميذ يفضلون الفيزياء"

لا تستلزم العبارة " جميع التلاميذ لا يفضلون الرياضيات أو يفضلون الفيزياء "

ويمكنك ملاحظة أيضا أن الاستلزام العكسي:

$(\forall y \in F)(\exists x \in E): A(x,y) \Rightarrow (\exists x \in E)(\forall y \in F)\ A(x,y)$ يمكن أن يكون خاطئا.

مثلا : العبارة: " $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N}): x < n$ " صحيحة، ولكن العبارة: " $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}): x < n$ " خاطئة.

6-3- تكافؤ عبارتين :

تعريف

انطلاقا من عبارتين p و q نحصل على العبارة " $(p \Rightarrow q)$ و $(q \Rightarrow p)$ " التي تكون صحيحة فقط إذا كانت p و q لهما نفس قيم الحقيقة.

العبارة $(p \Rightarrow q)$ و $(q \Rightarrow p)$ تسمى تكافؤ العبارتين p و q ونكتب $(p \Leftrightarrow q)$ وتقرأ p تكافئ q

جدول حقيقة العبارة($P \Leftrightarrow Q$):

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

ملاحظة:

تكافؤ العبارتين p و q هي العبارة التي نرمز لها بالرمز $P \Leftrightarrow Q$ وتكون صحيحة إذا كانت P و Q صحيحتين معا أو P و Q خاطئتين معا.

أمثلة: * $\left(|1-\pi| = \pi - 1\right) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ عبارة خاطئة .

* $|1-\pi| = \pi - 1 \Leftrightarrow 12 < 0$ عبارة صحيحة

تطبيقات:

* 1) x و y عددان معلومان. بين أن: $8 = y$ و$x = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2}$

2) a و b عددان حقيقيان. بين أن: $|a+b| < |1+ab| \Leftrightarrow (a^2-1)(b^2-1) > 0$

3) بين أن: $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\rceil A \Leftrightarrow \rceil B)$

ملاحظة:

- العبارتان $p \Leftrightarrow q$ و $q \Leftrightarrow p$ لهما نفس جدول الحقيقة (التكافؤ عملية تبادلية)
- العبارتان $p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow R)$ و$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow R$ لهما نفس جدول حقيقة (التكافؤ عملية تجمعية)
- لدينا: $\begin{cases} (p \Leftrightarrow q) \\ (q \Leftrightarrow R) \end{cases} \Rightarrow (p \Leftrightarrow R)$ (التكافؤ عملية تعدية)

بصفة عامة:

لتكن p و r_1 وr_2و.......... r_n عبارات.

إذا كانت p عبارة صحيحة و $\begin{cases} p \Leftrightarrow r_1 \\ R_1 \Leftrightarrow r_2 \\ \\ r_n \Leftrightarrow q \end{cases}$ فإن q عبارة صحيحة.

عمليا:

للبرهان على صحة عبارة ما q ، نبرهن على صحة التكافؤات المتتالية $p \Leftrightarrow r_1$ و $r_1 \Leftrightarrow r_2$ و.......و $r_n \Leftrightarrow q$ حيث p عبارة صحيحة ثم نستنتج أن التكافؤ $p \Leftrightarrow q$ صحيح إذن q عبارة صحيحة .

هذا النوع من الاستدلال يسمى، **الاستدلال بالتكافؤات المتتالية.**

أمثلة:

1) لنبين أن $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} = 2 \Leftrightarrow x = y = 0$

ليكن (x, y) عنصرا من $\mathbb{R}^2$ لدينا:

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} = 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+1} - 1\right) + \left(\sqrt{y^2+1} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1} - 1 = 0 \\ \sqrt{y^2+1} - 1 = 0 \end{cases}$$ لأن $\left(\sqrt{x^2+1} - 1 \geq 0\right)$ $\left(\sqrt{y^2+1} - 1 \geq 0\right)$

$$\Leftrightarrow (x^2 = 0) \text{ و } y^2 = 0) \Leftrightarrow (x = y = 0)$$

3) ليكن x و y عددين حقيقيين موجبين قطعا. لنبين أن: $\boxed{x < y \Leftrightarrow \frac{x}{y} < \frac{2x+5y}{5x+2y} < \frac{y}{x}}$

لدينا :

$$\frac{x}{y}<\frac{2x+5y}{5x+2y}<\frac{y}{x} \Leftrightarrow x^2<\frac{xy(2x+5y)}{5x+2y}<y^2 \Leftrightarrow 5x^3+2x^2y<2x^2y+5xy^2 \text{ و } 2x^2y+5xy^2<5xy^2+2y^3$$

$$\Leftrightarrow 5x^3<5xy^2 \text{ و } 2x^2y<2y^3$$

$$\Leftrightarrow x^2<y^2 \text{ و } x^2<y^2 \quad (\text{لأن } x>0 \text{ و } y>0)$$

$$\Leftrightarrow x^2<y^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}\leq\sqrt{y^2} \Leftrightarrow |x|<|y| \Leftrightarrow x<y$$

وبالتالي: $x<y \Leftrightarrow \frac{x}{y}<\frac{2x+5y}{5x+2y}<\frac{y}{x}$

خاصية: لتكن $p(x)$ و $q(x)$ خاصيتين للمتغير x و E مجموعة غير فارغة. العبارتان التاليتان صحيحتان:

$$\left[(\forall x\in E): p(x) \text{ و } q(x)\right] \Leftrightarrow \left[(\forall x\in E: p(x)) \text{ و } (\forall x\in E: q(x))\right]$$

$$\left[(\exists x\in E): p(x) \text{ أو } q(x)\right] \Leftrightarrow \left[(\exists x\in E: p(x)) \text{ أو } (\exists x\in E: q(x))\right]$$

ملاحظة هامة: العبارة: " كل عدد صحيح طبيعي هو زوجي أو فردي " لا تستلزم العبارة:
" كل عدد صحيح هو زوجي أو كل عدد صحيح طبيعي هو فردي "
ومنه فالعبارة : $\left[(\forall x\in E): A(x) \text{ أو } B(x)\right] \Rightarrow \left[(\forall x\in E): A(x) \text{ أو } (\forall x\in E): B(x)\right]$
لا تكون دائما صحيحة.

تطبيق:
أعط مثالا تكون فيه العبارة:
$\left[(\exists x\in E): A(x) \text{ و } B(x)\right] \Rightarrow \left[(\exists x\in E: A(x)) \text{ و } (\exists x\in E: B(x))\right]$ صحيحة ولكن الاستلزام العكسي خاطئ.

ملاحظة هامة:
في بعض الحالات، للبرهان على التكافؤ $(p\Leftrightarrow q)$ يكفي أن نبرهن على الإستلزامين $(p\Rightarrow q)$ و $(q\Rightarrow p)$.
هذا النوع من البرهان يستعمل غالبا لأن من مميزاته أنه:
1) يبين لنا ما هي العبارات الصحيحة التي نحن في حاجة إليها لكي تكون عبارة q إلى أن يظهر دور العبارة p (مع الملاحظة أننا في بعض الحالات لا نحتاج إلى p

مثال:
a و b عددان حقيقيان معلومان غير منعدمين. نبين أن: $(a+b=0) \Leftrightarrow (a^2=b^2 \text{ و } ab<0)$
أي لنبين أن: $\left[(a+b=0) \Rightarrow (a^2=b^2 \text{ و } ab<0)\right]$ و $\left[(a^2=b^2 \text{ و } ab<0) \Rightarrow (a+b=0)\right]$

- إذا كان $a+b=0$ (أو نفترض أن $a+b=0$) فإن $a=-b$ إذن $ab<0$ و $a^2=b^2$

لنبين أن: $\left[(a^2=b^2 \text{ و } ab<0) \Rightarrow (a+b=0)\right]$

- إذا كان $ab<0$ و $a^2=b^2$ فإن $ab<0$ و $(a=b \text{ أو } a=-b)$ وبما أن $ab<0$

فإن $a=-b$ أي $a+b=0$
وبالتالي: $(a+b=0) \Leftrightarrow (a^2=b^2 \text{ و } ab<0)$

4) القوانين المنطقية

4-1- قانون منطقي

تعريف

لتكن P عبارة مكونة من عدة عبارات Q_1 و Q_2 و.....Q_n ومرتبطة فيما بينها بروابط منطقية.
نقول إن P قانون منطقي إذا كانت P صحيحة مهما تكن قيمة صحة العبارات Q_1 و Q_2 و.....Q_n.

أمثلة: العبارات التالية هي قوانين منطقية، (تحقق من ذلك بواسطة جدول حقيقة)

1) $(p \text{ و } q) \Leftrightarrow (q \text{ و } p)$ 2) $((p \text{ أو } q)) \Leftrightarrow ((q \text{ أو } p))$

3) $((p \text{ و } q) \text{ و } r) \Leftrightarrow (p \text{ و } (q \text{ و } r))$ 4) $((p \text{ أو } q) \text{ أو } r) \Leftrightarrow (p \text{ أو } (q \text{ أو } r))$

(5 $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \left[(p \Rightarrow q) \text{ و } (q \Rightarrow p)\right]$ (6 $(p \text{ و } q) \Rightarrow p$

(7 $[p \Rightarrow (q \text{ أو } r)] \Leftrightarrow [(p \text{ و } \neg q) \Rightarrow r]$ (8 $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \text{ أو } q)$

(9 $(p \text{ و } (q \text{ أو } r)) \Leftrightarrow (p \text{ و } q) \text{ أو } (p \text{ و } r)$ (10 $(p \text{ أو } (q \text{ و } r)) \Leftrightarrow (p \text{ أو } q) \text{ و } (p \text{ أو } r)$

تطبيق: بين أن العبارات التالية قوانين منطقية:

(1 $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ (2 $A \Rightarrow (\overline{A} \Rightarrow B)$

2-4- قانون مورغان (*MORGAN*)

خاصية:

لتكن p و q عبارتين. العبارتان التاليتان قانونان منطقيان:

$$\left(\overline{p \text{ أو } q}\right) \Leftrightarrow \left(\overline{p} \text{ و } \overline{q}\right)$$

$$\left(\overline{p \text{ و } q}\right) \Leftrightarrow \left(\overline{p} \text{ أو } \overline{q}\right)$$

أمثلة: 1) لنحدد $\overline{(p \Rightarrow q)}$

لدينا: $\overline{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow \left(\overline{\overline{p} \text{ أو } q}\right)$

$\Leftrightarrow p \text{ و } \overline{q}$

2) لنحدد $\left(\overline{p \text{ و } \overline{q}}\right)$

لدينا: $\left(\overline{p \text{ و } \overline{q}}\right) \Leftrightarrow \overline{p} \text{ أو } q$

تطبيق: حدد نفي العبارات التالية: (1 $p \text{ أو } \overline{q}$ (2 $\overline{p} \text{ أو } q$ (3 $p \Rightarrow \overline{q}$

3-4- قانون الاستلزام المضاد للعكس :

خاصية:

لتكن p و q عبارتين. العبارة التالية قانون منطقي: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$

البرهان:

باستعمال جدول الحقيقة يمكن البرهان على هذا القانون المنطقي.

ملاحظة:

الاستلزامان $(\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ و $(p \Rightarrow q)$ متكافئان.

الإستلزام $(\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ يسمى الإستلزام المضاد للعكس للاستلزام $(p \Rightarrow q)$

لاحظ أن العبارة $(\overline{p} \Rightarrow \overline{q}) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ يمكن أن تكون خاطئة.

مثلا العبارة (8 زوجي) $\Rightarrow$ ($5 < 2$) صحيحة، لكن العبارة (8 فردي) $\Rightarrow$ ($5>2$) خاطئة.

نتيجة:

(الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس).

إذا كان في بعض الوضعيات يصعب البرهان مباشرة على صحة الاستلزام $p \Rightarrow q$،

فإنه يمكن أن نبرهن على صحة الاستلزام المضاد للعكس $(\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$ ثم نستنتج $p \Rightarrow q$.

عمليا:

نفترض أن العبارة $\neg q$ صحيحة ونبين أن العبارة $\neg p$ صحيحة أيضا ثم نستنتج أن $p \Rightarrow q$ صحيحة.

هذا النوع من الإستدلال يسمى الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس.

مثال: ليكن a و b عددين حقيقيين غير متقابلين. لنبين أن: $a \neq -\frac{1}{2}b \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} \neq -3$

باستعمال الاستلال بالاستلزام المضاد للعكس، يكفي أن نبين أن: $\frac{a-b}{a+b}=-3 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}b$.

لينا: $\frac{a-b}{a+b}=-3 \Rightarrow a-b=-3a-3b \Rightarrow a+3a=-3b+b \Rightarrow 4a=-2b \quad \Rightarrow a=-\frac{1}{2}b$

وبالتالي فإن: $a \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} \neq -3$

تطبيق

بين أن :

1) $(\forall x \in \mathbb{R})\ x \neq 0 \Rightarrow \sqrt{1+x} \neq 1+\frac{x}{2}$

2) $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \neq 3 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} \neq 1$

3) $\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\right) \quad 4y \neq -3x \Rightarrow x-y \neq 7(x+y)$

4) $\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\right) \quad (xy-1)(x-y) \neq 0 \Rightarrow x(y^2+y+1) \neq y(x^2+x+1)$

5) $\left(\forall (x,y) \in \left]1;+\infty\right[^2\right) \quad x \neq y \Rightarrow x^2-2x \neq y^2-2y$

6) $\left(\forall x \in \mathbb{R})\right) \quad x \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{x}} \neq 1-\sqrt{x}$

4-3-الاستدلال بالخلف.

خاصية:

لتكن P و Q عبارتين. العبارة التالية قانون منطقي: $[(\overline{P} \Rightarrow Q)$ و $(\overline{P} \Rightarrow \overline{Q})] \Rightarrow P$

البرهان:

نضع $[(\overline{P} \Rightarrow Q)$ و $(\overline{P} \Rightarrow \overline{Q})]$ $\boxed{\mathbb{R}}$.

نفترض أن العبارة R صحيحة . لدينا :

$$R \Leftrightarrow (P \text{ أو } Q) \text{ و } (P \text{ أو } \overline{Q}) \Leftrightarrow (P \text{ و } P) \text{ أو } (P \text{ و } \overline{Q}) \text{ أو } (Q \text{ و } P) \text{ أو } (Q \text{ و } \overline{Q})$$

$$\Leftrightarrow P \text{ أو } (P \text{ و } \overline{Q}) \text{ أو } (Q \text{ و } P) \text{ أو } (Q \text{ و } \overline{Q})$$

لدينا $(Q \text{ و } \overline{Q})$ عبارة خاطئة

ومنه فإن: (q و p) أو (q ¬ و p) أو p صحيحة أي: (q أو ¬q) أو p صحيحة.

لدينا: ¬q أو q عبارة صحيحة ومنه p أو p صحيحة أي p صحيحة.

ملاحظة :

لكي نبين أن عبارة p صحيحة:

نفترض أن $\overline{p}$ صحيحة ونبين أن $\overline{p} \Rightarrow q$ استلزام صحيح وأن $\overline{q}$ عبارة صحيحة.

وتكون (q و $\overline{q}$) صحيحة ونحصل على تناقض.

مثال :

ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{R}$ بحيث $\left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad |a-b|<\varepsilon$ (1)

لنبين أن $a=b$ (مستدلا بالخلف)

نفترض أن $a \neq b$ إذن: $|a-b|>0$

نأخذ $\varepsilon=\frac{|a-b|}{2}$ وحسب (1) $|a-b|>\frac{|a-b|}{2}$

4-4- الاستدلال بفصل الحالات :

تعريف

لتكن P و Q و R عبارات منطقية.
العبارة: $[(P \Rightarrow R)$ و $(Q \Rightarrow R)] \Rightarrow [(P$ أو $Q) \Rightarrow R]$ قانون منطقي.

نستنتج أنه:
إذا كانت العبارة (P أو Q) صحيحة، فإنه للبرهان على صحة العبارة R، نبين أن الاستلزامين $(P \Rightarrow R)$ و $(Q \Rightarrow R)$ صحيحان، ثم نستنتج أن العبارة R صحيحة. وهذا النوع من الاستدلال يسمى الاستدلال بفصل الحالات.

عمليا :
نطبق هذا الاستدلال في حالة Q هي العبارة $\overline{P}$، فنحصل على القانون المنطقي التالي:
$\boxed{[(P \Rightarrow R) \text{ و } (\overline{P} \Rightarrow R)] \Rightarrow R}$ (لأن العبارة $\overline{P}$ أو P صحيحة)

مثال:
حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $(E) \quad |x-1|+|2x-3|=6$

باعتبار الجدول التالي سنقيم الدراسة إلى ثلاثة أجزاء بفصل الحالات:

x	$-\infty$ … 1	1 … $\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$ … $+\infty$
$\|2x-3\|$	$-2x+3$	$-2x+3$	$2x-3$
$\|x-1\|$	$-x+1$	$x-1$	$x-1$
$\|2x-3\|+\|x-1\|$	$-3x+4$	$-x+2$	$3x-4$

$I_3=\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ و $I_2=\left]1;\frac{3}{2}\right]$ و $I_1=]-\infty;1]$

نرمز ب S_i لمجموعة حلول المعادلة (E) على المجال I_i $(i\in\{1,2,3\})$

الحالة (1) $x\in I_1$: $x\in S_1 \Leftrightarrow -3x+4=6 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$

وبما أن: $-\frac{2}{3}\in I_1$ فإن $S_1=\left\{-\frac{2}{3}\right\}$

الحالة (2) $x\in I_2$: $x\in S_2 \Leftrightarrow -x+2=6 \Leftrightarrow x=-4$

وبما أن $-4\notin I_2$ فإن $S_2=\varnothing$

الحالة (3) $x\in I_3$: $x\in S_3 \Leftrightarrow 3x-4=6 \Leftrightarrow x=\frac{10}{3}$

وبما أن $\frac{10}{3}\in I_3$ فإن $S_3=\left\{\frac{10}{3}\right\}$

تتكون مجموعة حلول المعادلة (E) من حلول مختلفة ناتجة عن الحالات الثلاث، الشيء الذي يعطي: $S=\left\{-\frac{2}{3};\frac{10}{3}\right\}$.

نقول إننا استدللنا بفصل الحالات. لقد قسمنا $\mathbb{R}$ إلى اتحاد مجالات وبحثنا عن الحلول في كل من هذه المجالات.

مثال:
حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $(I):\sqrt{2x^2+1}>2x-4$

نلاحظ أنه مهما يكن x من $\mathbb{R}$ لدينا $2x^2+1>0$. نستنتج أن التعبير $\sqrt{2x^2+1}$ معرف على $\mathbb{R}$.

عوض أن نشتغل مباشرة على $\mathbb{R}$. سنقسم الدراسة إلى جزئين، حسب إشارة $2x-4$

<u>الحالة الأولى $x<2$:</u>

إذن $2x-4<0$ وبما أن $\sqrt{2x^2+1}>0$ ، فإن كل عنصر من المجال $]-\infty,2[$ يعتبر حلا للمتراجحة (I).

الحالة الثانية: $x \geq 2$:

طرفا المتراجحة موجبان وباعتبار الدالة المربع تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$، نستنتج أن المتراجحة (I).

تكافئ: $\left(\sqrt{2x^2+1}\right)^2 > (2x-4)^2$ الذي يعطي بعد الاختزال: $-2x^2+16x-15>0$

هذه المتراجحة محققة بالنسبة لـx في المجال $\left]\frac{16-\sqrt{136}}{4};\frac{16+\sqrt{136}}{4}\right[$ و $x \in [2,+\infty[$

نستنتج أن حلول المتراجحة (I) في $[2,+\infty[$ هي العناصر من المجال $\left[2;\frac{16+\sqrt{136}}{4}\right[$

وأخيرا، فغن مجموعة حلول المتراجحة هو اتحاد المجالات التي تم الحصول عليها في كلتا الحالتين، الشيء الذي يعطي:

$$S = \left]-\infty;\frac{8+\sqrt{34}}{2}\right[$$

مثال:

ليكن a عددا صحيحا نسبيا. برهن أن $a(a^2-1)$ مضاعف لـ3

سنستدل من جديد بفصل الحالات، حسب الباقي r للقسمة الإقليدية لـa على 3.

الحالة الأولى: r = 0 : يوجد عدد صحيح نسبي k بحيث: <u>a = 3k</u> إذن

$$a(a^2-1) = 3\left[k(9k^2-1)\right]$$

الحالة الثانية: r = 1 : يوجد عدد صحيح نسبي k بحيث <u>a = 3k + 1</u>

$$a(a^2-1) = (3k+1)(9k^2+6k) = 3(3k+1)(3k^2+2k)$$

الحالة الثالثة: r = 2 : يوجد عدد صحيح نسبي k بحيث: <u>a = 3k + 2</u>

إذن: $a(a^2-1) = (3k+2)(9k^2+12k+3) = 3(3k+2)(3k^2+4k+1)$

في كل من الحالات الثلاث، يوجد عدد صحيح نسبي k′ بحيث $a(a^2-1) = 3k'$

نكون إذن قد برهنا في الحالات الثلاث أن $a(a^2-1)$ مضاعف لـ3.

ملاحظة: يعود الاستدلال بفصل الحالات على مجموعة A إلى إنجاز تجزئة لـA والاستدلال على كل من أجزاء هذه التجزئة.

6-4-الاستدلال بالترجع :

خاصية: لتكن $P(n)$ دالة عبارية لمتغير n من $\mathbb{N}$.		
إذاكان:	1) يوجد عنصر n_0 من $\mathbb{N}$ بحيث $P(n_0)$ عبارة صحيحة. 2) لكل $n \geq n_0$ الاستلزام $\left[P(n) \Rightarrow P(n+1)\right]$ صحيح.	**فإن** $P(n)$ عبارة صحيحة لكل $n \geq n_0$ من $\mathbb{N}$.

البرهان:

نعتبر المجموعة $A = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0 / p(n)$ صحيحة $\}$

نلاحظ أن: $A \subset \mathbb{N}$ و $A \neq \varnothing$ و $A = \{n_0, n_0+1, n_0+2, ...\}$

نستدل بالخلف ونفترض أنه يوجد $n \geq n_0$ بحيث P(n) عبارة خاطئة.

نضع: N أصغر قيمة (أكبر من n_0) بحيث P(N) عبارة خاطئة

لدينا: P(N-1) صحيحة ونعلم أن: $P(N-1) \Rightarrow P(N)$ ومنه فإن P(N) صحيحة وهذا تناقض.

أمثلة:

1) ليكن $a \in \mathbb{R}^+$ نبين أن: $(1+a)^n \geq 1+an \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

لتكن P(n) الخاصية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ ب: $(1+a)^n \geq 1+an$

من أجل n = 1 لدينا: $(1+a)^1 \geq 1+a.1$ صحيحة. ومنه P(1) صحيحة.

نفترض أن P(n) صحيحة أي نبين: $(1+a)^n \geq 1+a.n$

ونبين أن العبارة P (n + 1) صحيحة أي نبين: $(1+a)^{n+1} \geq 1+a(n+1)$

لدينا: $(1+a)^{n+1} = (1+a)^{n+1} = (1+a)^n.(1+a)$ و $(1+a)^n \geq 1+an$

أي: $(1+a)^{n+1} \geq (1+an)(a+1)$ (لأن $1+a>0$)

-نقارن $(1+an)(1+a)$ و $1+a(n+1)$

لدينا: $1+a(n+1)-(1+an)(1+a) = 1+an+a-1-a-an-a^2n$

$= -a^2n$

وبما أن $-a^2n<0$ فإن $(1+an)(1+a) \geq 1+a(n+1)$ ومنه: $(1+a)^{n+1} \geq 1+a(n+1)$

أي: $P(n+1)$ صحيحة

وبالتالي: $(1+a)^n \geq 1+an \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

2) لكل $n \in \mathbb{N}^*$ نضع $S_n = 1^3+2^3+3^3+......+n^3$

لنبين أن: $S_n \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

لتكن P(n) الخاصية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ ب: $S_n \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

من أجل n = 1 لدينا: $S_1 = 1^3 = 1$ و $\frac{1(1+1)^2}{4} = 1$ إذن: $S_1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$ ومنه P(1) صحيحة.

نفترض أن P(n) صحيحة أي $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ونبين أن: P(1+ n) صحيحة أي $S_{n+1} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

لدينا: $S_{n+1} = 1^2+2^2+3^2+.....................n^3+(n+1)^3 = S_n+(n+1)^3$

$$S_{n+1} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

ومنه P(n + 1) صحيحة.

وبالتالي فإن $S_n \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

تطبيقات:

1) بين بالترجع أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$:

a) $1+2+.......+n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $1^2+2^2+.......+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2) بين بالترجع أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ العدد 7^n-2^n يقبل القسمة على 5.